

PROBLEM 16.

MAGNETIC BRAKE

Domagoj Plušćec
XV. gimnazija

Problem 16.

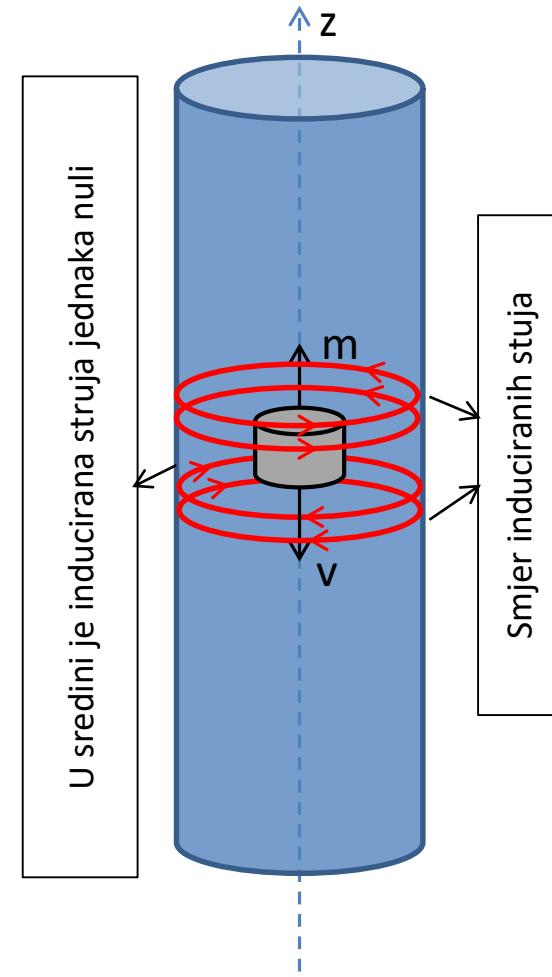
„When a strong magnet falls down a non-ferromagnetic metal tube, it will experience a ***retarding force***.

Investigate the phenomenon.

Što uzrokuje silu ?

- Magnet pada pod utjecajem gravitacije
- U prostoru dolazi do promjene magnetskog toka
- U cijevi se inducira gustoća struje
- Struje djeluju na magnet tako da smanjuju brzinu promjene (smanjuju brzinu magneta)

m – magnetski moment magneta



Sila

1/2

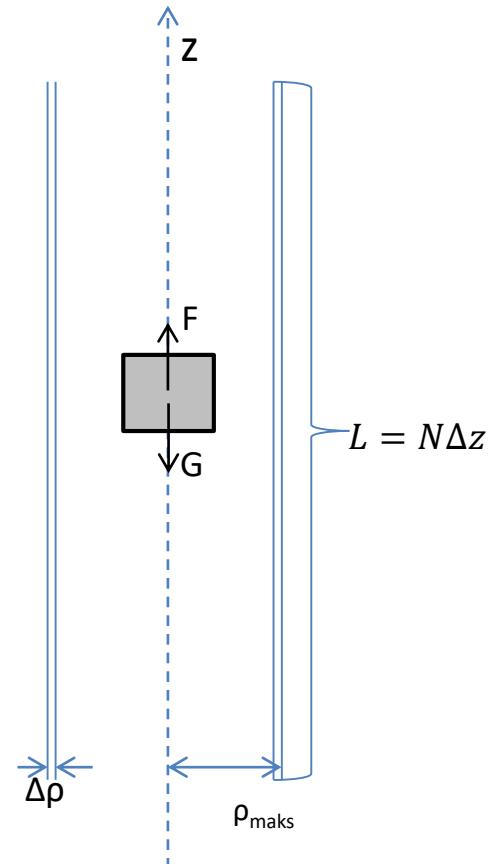
- Prema III. Newtonovom zakonu vrijedi:

$$F_{mag} = -F_{struja}$$

- Odnosno:

$$d\vec{F}_{mag} = -dI\vec{l} \times \vec{B}$$

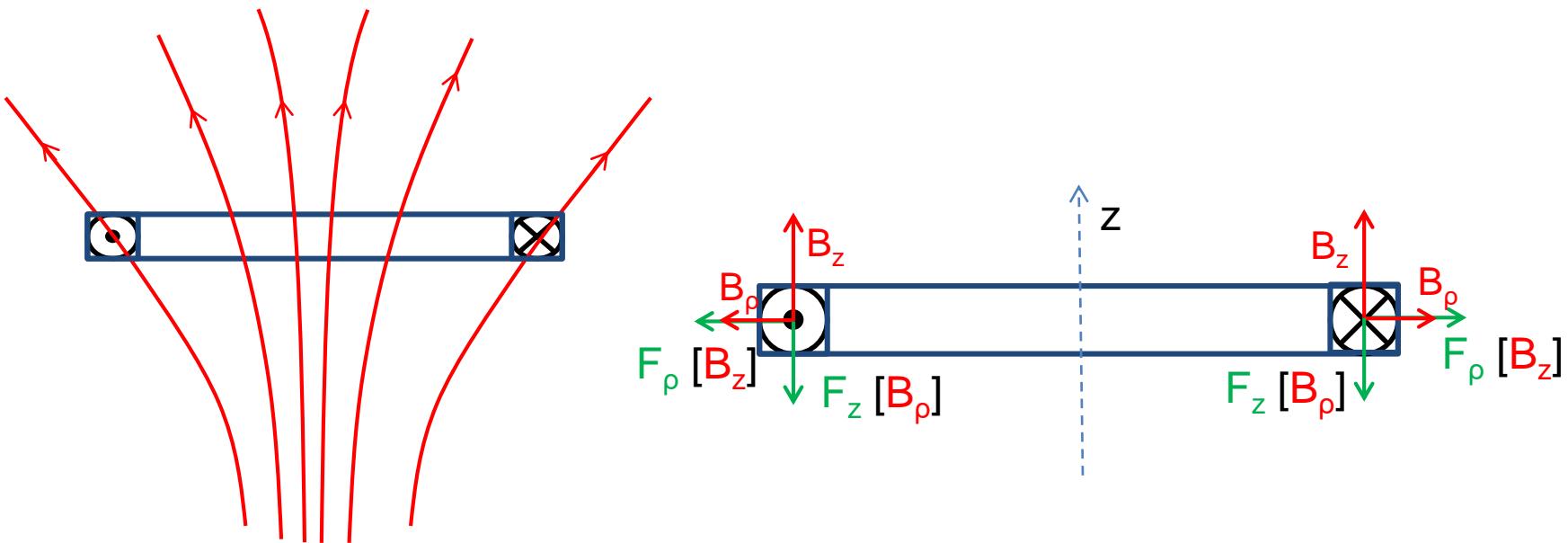
F_{mag} – sila struje na magnet
 F_{struja} – sila magneta na struju
 dI – struja kroz prsten visine Δz
 B – polje magneta
 L – duljina cijevi
 N – broj prstenova visine Δz
 $\Delta\rho$ – debljina cijevi
 ρ_m – srednji promjer cijevi



Sila

2/2

$$d\vec{F}_{mag} = -dI \vec{l} \times \vec{B}$$



Komponenta polja B_ρ je odgovorno za silu u z-smjeru pa traženu silu možemo napisati kao

$$dF_{mag} = -dI \cdot 2\pi\rho_m \cdot B_\rho$$

Struja

$$dI = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \frac{dz_0}{dz_0} = \frac{d\phi}{dz} v_0$$

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dz} v_0$$

$$dI = \frac{\Delta\rho\sigma v_0}{2\pi\rho_m} \frac{d\phi}{dz} dz$$

v_0 – brzina magneta
 $\frac{d\phi}{dt}$ – promjena
 magnetskog toka u
 vremenu
 ε – inducirani napon
 σ – vodljivost cijevi
 I – duljina prstena
 A – debљina prstena
 R – otpor prstena cijevi

$\frac{d\phi}{dt}$ - možemo izraziti
 kao prostornu promjenu
 jer tok ovisi samo o
 promjeni položaja
 magneta

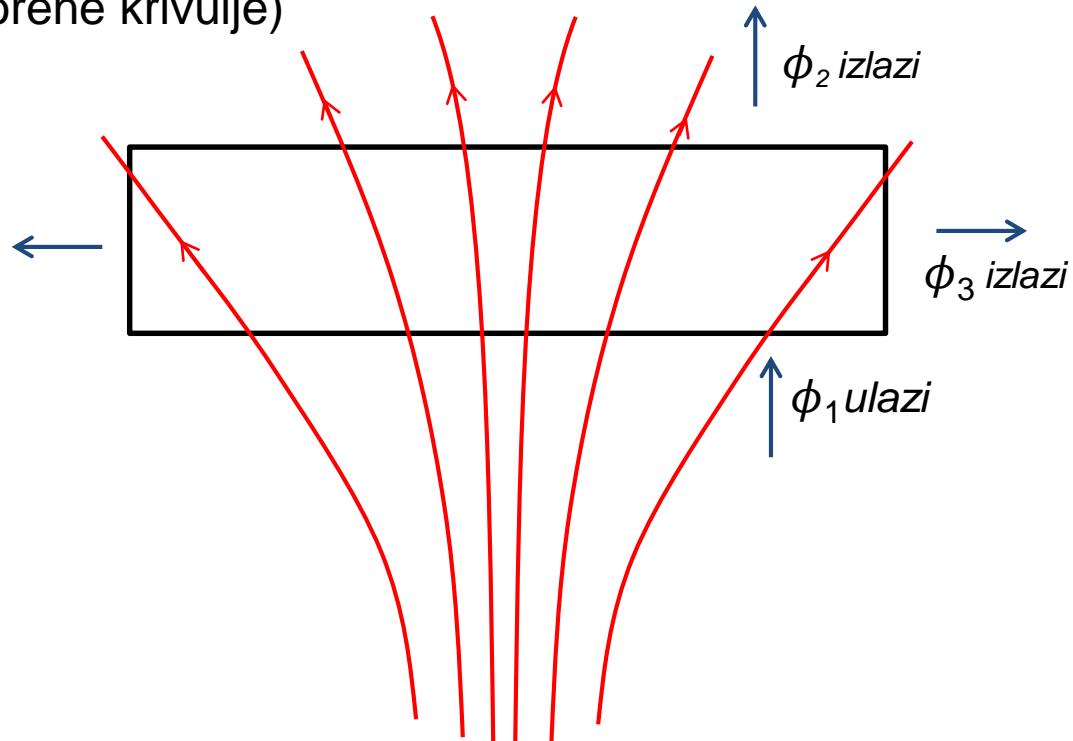
Polje B_ρ

- Općenito vrijedi $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
(silnice magnetskog polja zatvorene krivulje)

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$$

$$\begin{aligned}\phi_3 &= -d\phi \\ \phi_3 &= 2\pi\rho_m B_\rho dz\end{aligned}$$

$$B_\rho = -\frac{1}{2\pi\rho_m} \frac{d\phi}{dz}$$



ϕ – magnetski tok

Shematski prikaz prolaza magnetskog toka kroz zatvorenu plohu (u obliku diska)

Ukupna sila

- Nakon uvrštavanja dobivamo izraz za ukupnu silu

$$F_{mag} = \frac{\sigma \Delta \rho v_0}{2\pi \rho_m} \int_{z1}^{z2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz$$

- Ako je magnet dovoljno daleko od rubova cijevi možemo proširiti raspon integracije

$$F_{mag} = \frac{\sigma \Delta \rho v_0}{2\pi \rho_m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz$$

z1, z2 – koordinate rubova cijevi

Prepostavke pri izvođenju modela

- Cijev u obliku valjka (rotacijski simetrična oko osi z)
- Cijev tanka i magnet ide manjim brzinama
(model ne uzima u obzir skin efekt)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} > \Delta\rho; \omega \sim \frac{v}{\rho_m}$$

$\delta = 38.3 \text{ mm} > 1 \text{ mm}$
 $Cu; v = 0.1 \text{ ms}^{-1}; \rho_m = 5.5 \text{ mm}$

- Nismo uzeli u obzir slučaj kad bi se magnet rotirao tako da mu se mijenja smjer magnetskog momenta

δ – dubina prodiranja polja

ω – karakteristična frekvencija sustava

Dipol

- Polje dipola u z smjeru (mjereno od magneta):

$$B_z(z, \rho) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(\frac{2z^2 - \rho_m^2}{(\sqrt{z^2 + \rho_m^2})^5} \right)$$

- Na temelju toga se dobije da je magnetski tok polja dipola jednak

$$\phi(z) = \frac{\mu_0 m}{2} \frac{\rho_m^2}{(\sqrt{z^2 + \rho_m^2})^3}$$

- Te slijedi da je sila jednaka

$$F_{mag} = \frac{9(\mu_0 m)^2 \sigma \Delta \rho \cdot \rho_m^3 \cdot v_0}{8\pi} \int_{z1}^{z2} \frac{z^2}{(z^2 + \rho_m^2)^5} dz$$

Dipol

- Ako je magnet dovoljno daleko od rubova, možemo proširiti granice integracije te dobivamo:

$$F_{mag} = \frac{45(\mu_0 M V)^2 \sigma \Delta \rho \cdot v_0}{1024 \pi \rho_m^4}$$

- Vrijedi za kuglaste magnete i za magnete čija je veličina znatno manja od promjera cijevi

μ_0 - permeabilnost vakuma
V – volumen magneta
M – magnetizacija

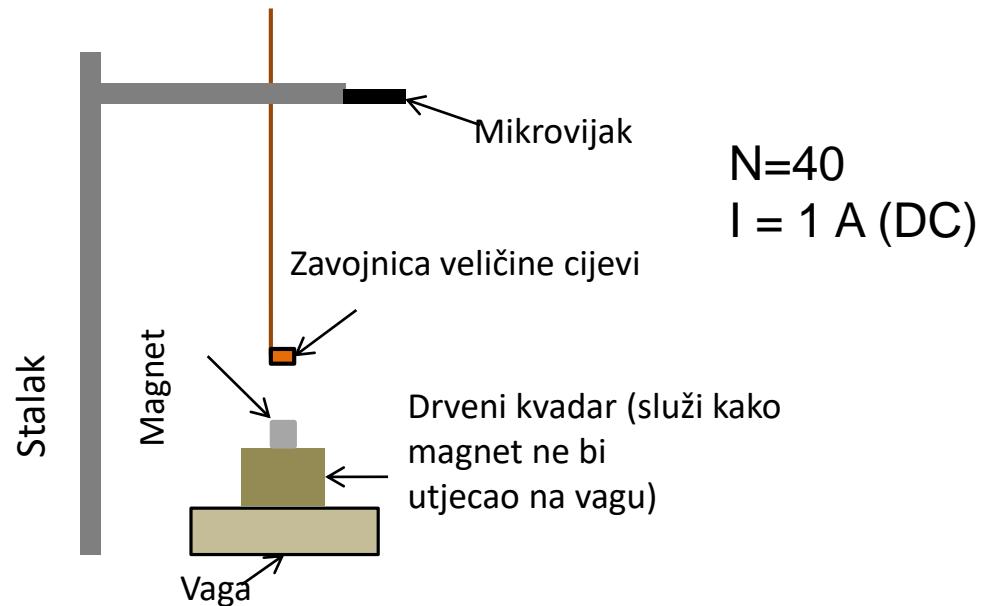
Određivanje promjene magnetskog toka kroz cijev

- Ne znamo $\frac{d\phi}{dz}$ za valjak, no možemo ga eksperimentalno odrediti

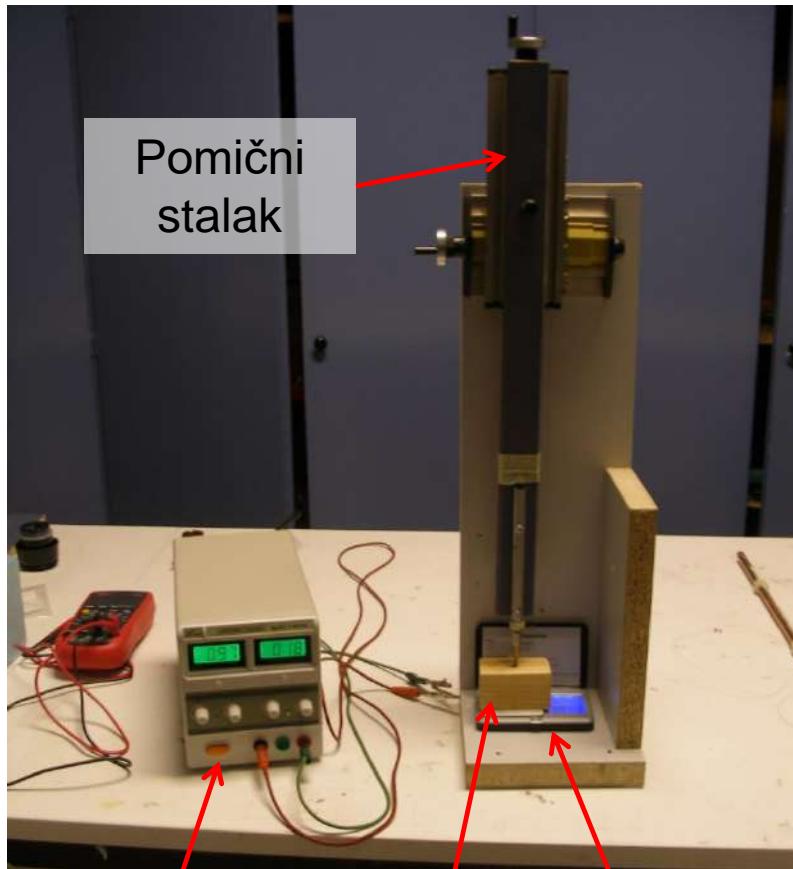
$$F = NI \cdot 2\pi\rho \cdot B_\rho$$

$$F = NI \cdot \frac{d\phi}{dz}$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{F}{NI}$$



- Kroz zavojnicu s N namotaja puštamo stalnu struju i pomičemo zavojnicu te mjerimo silu F na vagi

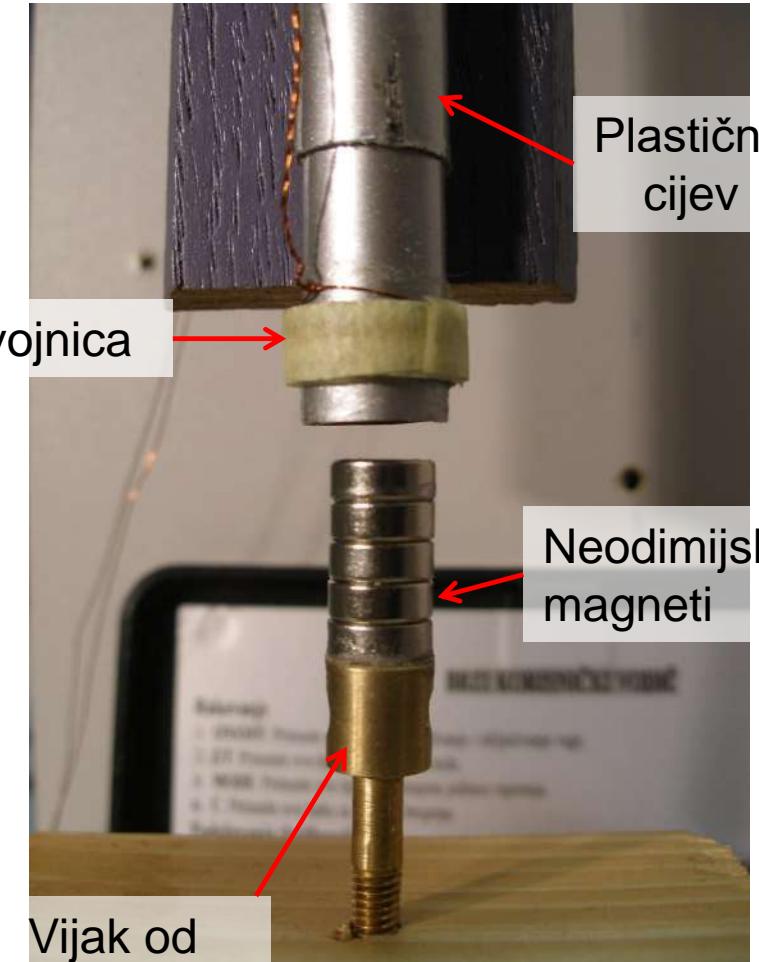


Izvor struje

Drvena
razmaknica

Vaga

Pomični
stalak



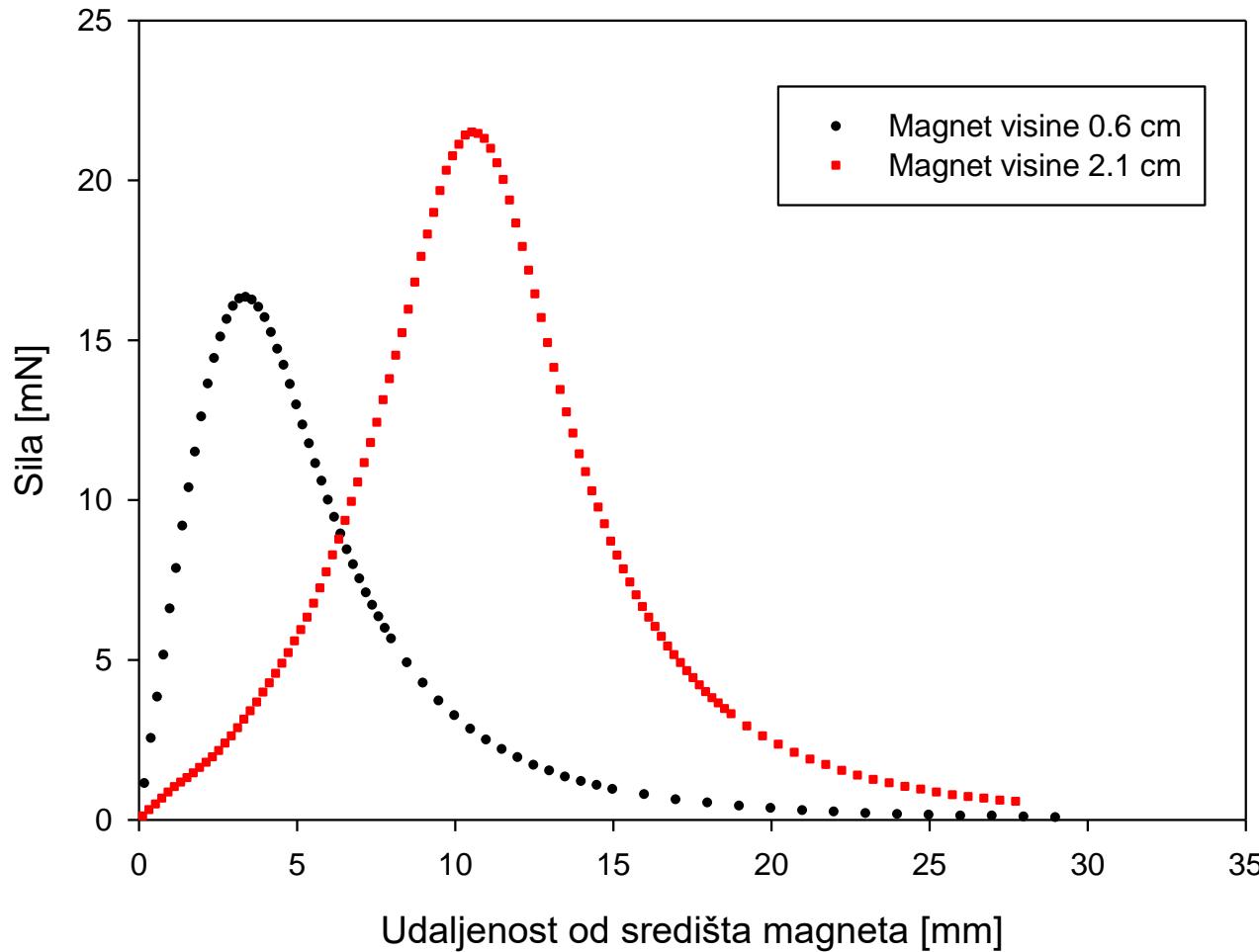
Plastična
cijev

Zavojnica

Neodimijski
magneti

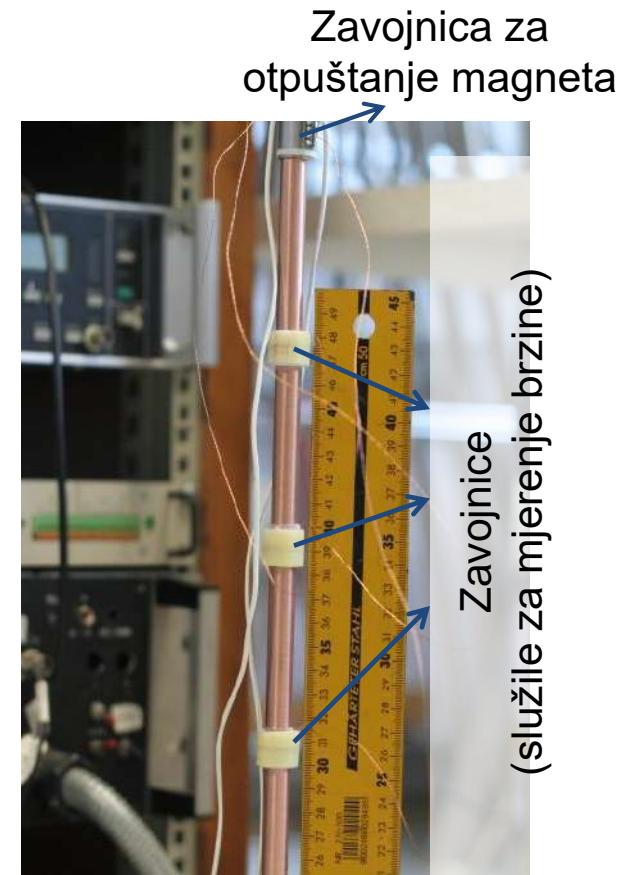
Vijak od
mesinga

Primjer sile na magnet u ovisnosti o udaljenosti od središta magneta



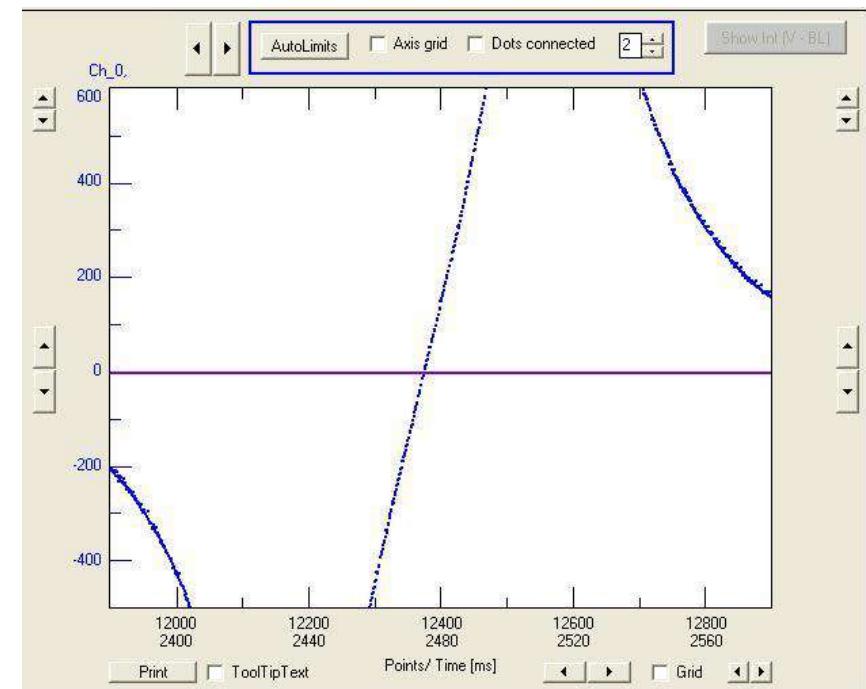
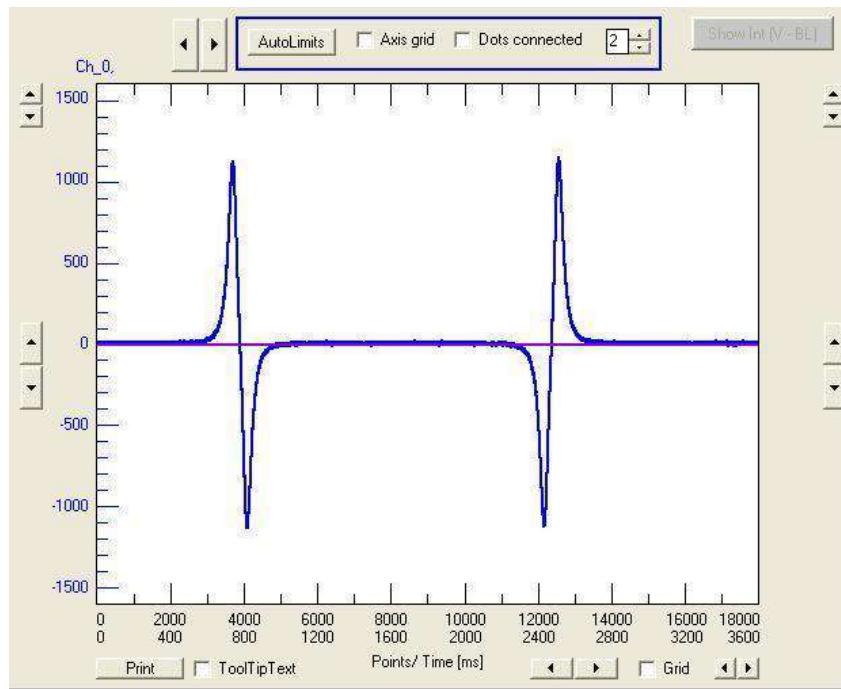
Mjerenje brzine magneta kroz cijev 1/2

- Zavojnica, kroz koju je tekla struja, je držala magnet na početnom mjestu
- Struja se prekinula pomoću računala kada se počeo snimati signal iz zavojnica
- Napon se mjerio na računalu preko A/D konvertera
- Iz grafa ovisnosti napona o vremenu se može odrediti prolazak magneta kroz središte zavojnice



Mjerenje brzine magneta kroz cijev 2/2

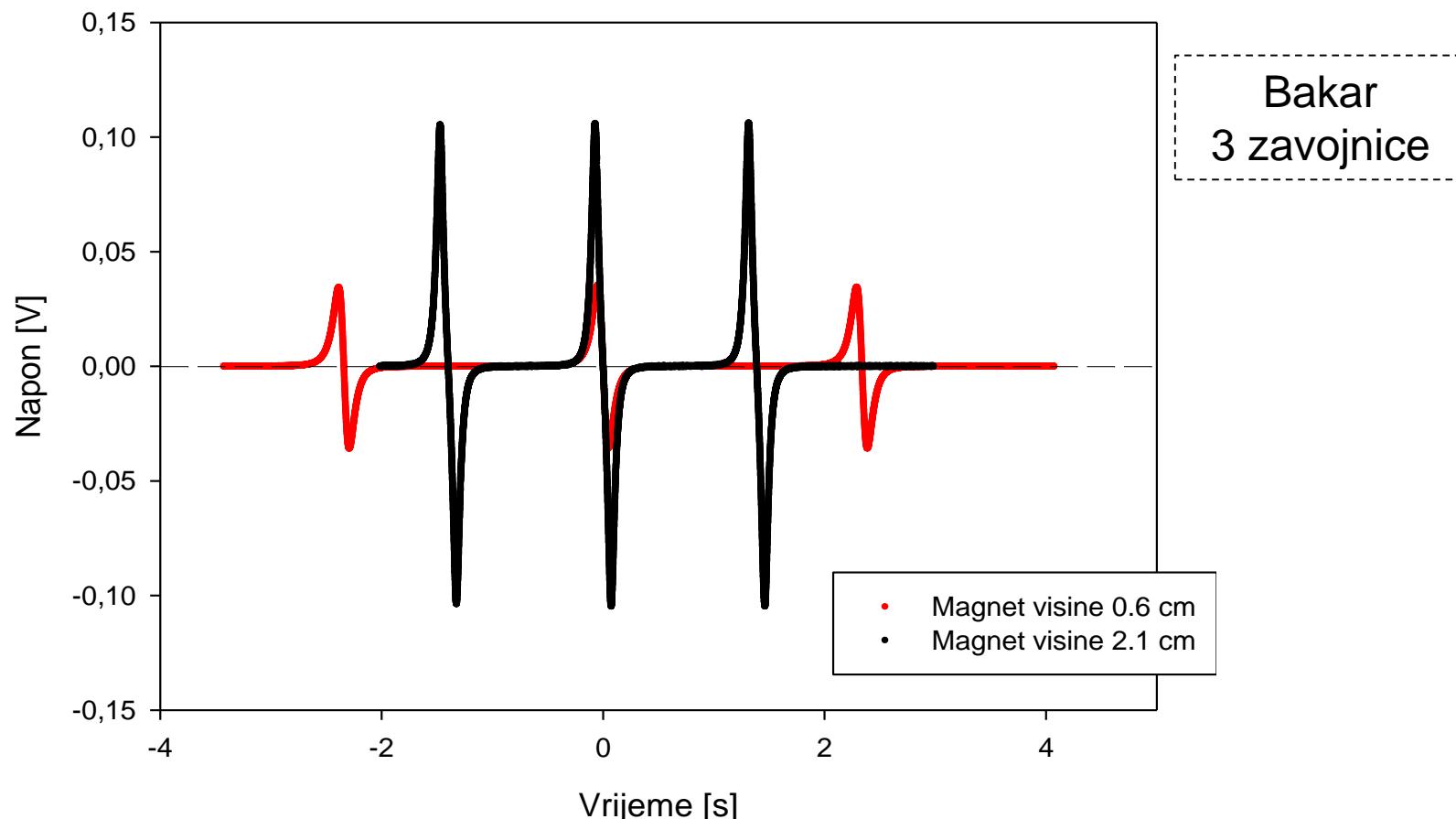
- Određivanje brzine



Aluminij, 2 zavojnice

Usporedba ovisnosti napona o vremenu za dva magneta

Ovisnost napona o vremenu



Konačna brzina

- Brzina kada se magnetska sila izjednaci s gravitacijskom silom

$$F_g = F_{mag}$$

$$m_{mag}g = \frac{\Delta\rho\sigma v_0}{2\pi\rho_m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz$$

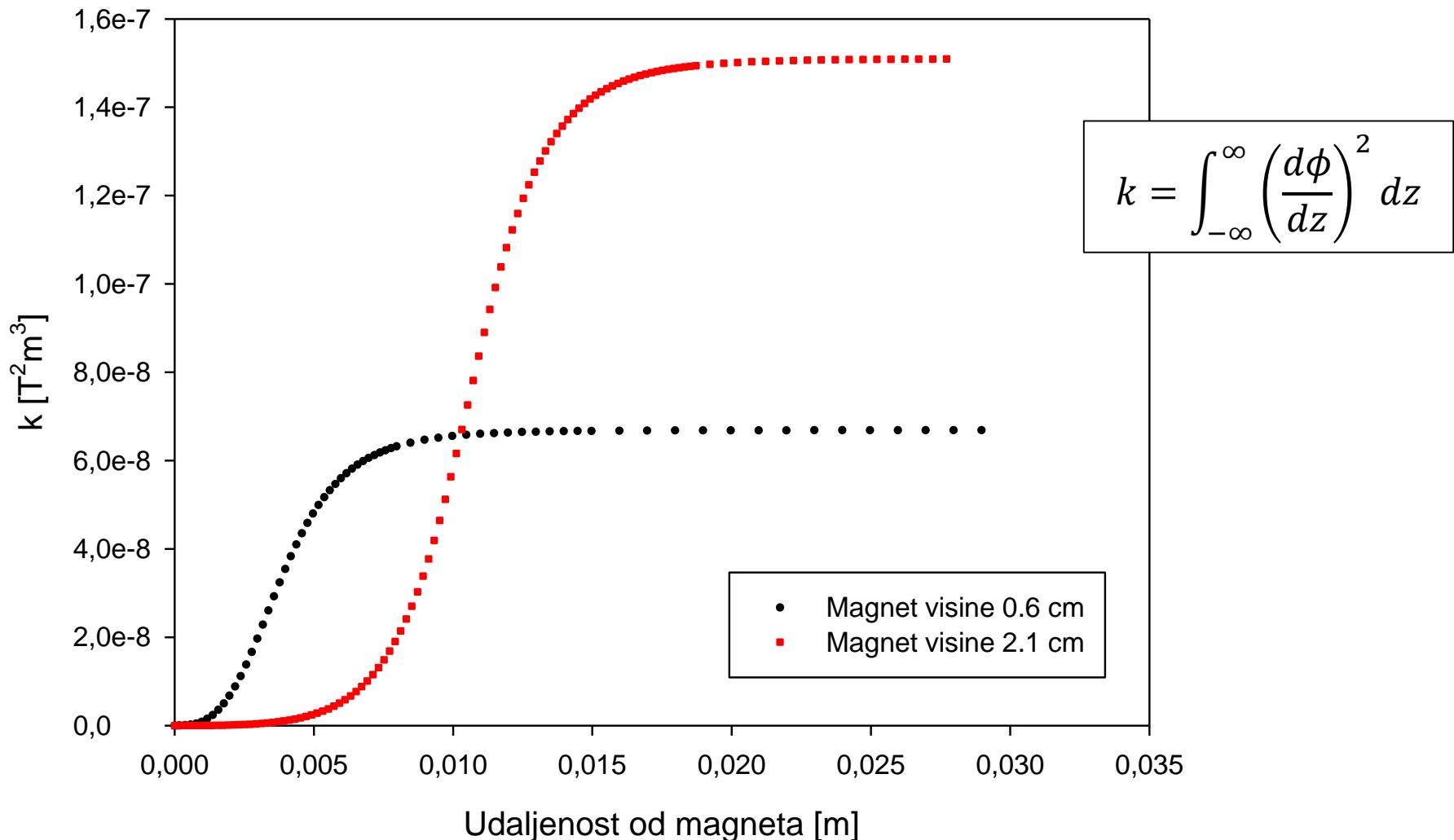
Supstitucija

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz$$

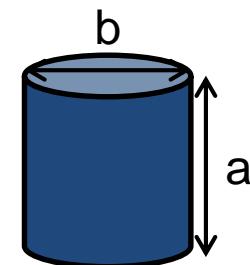
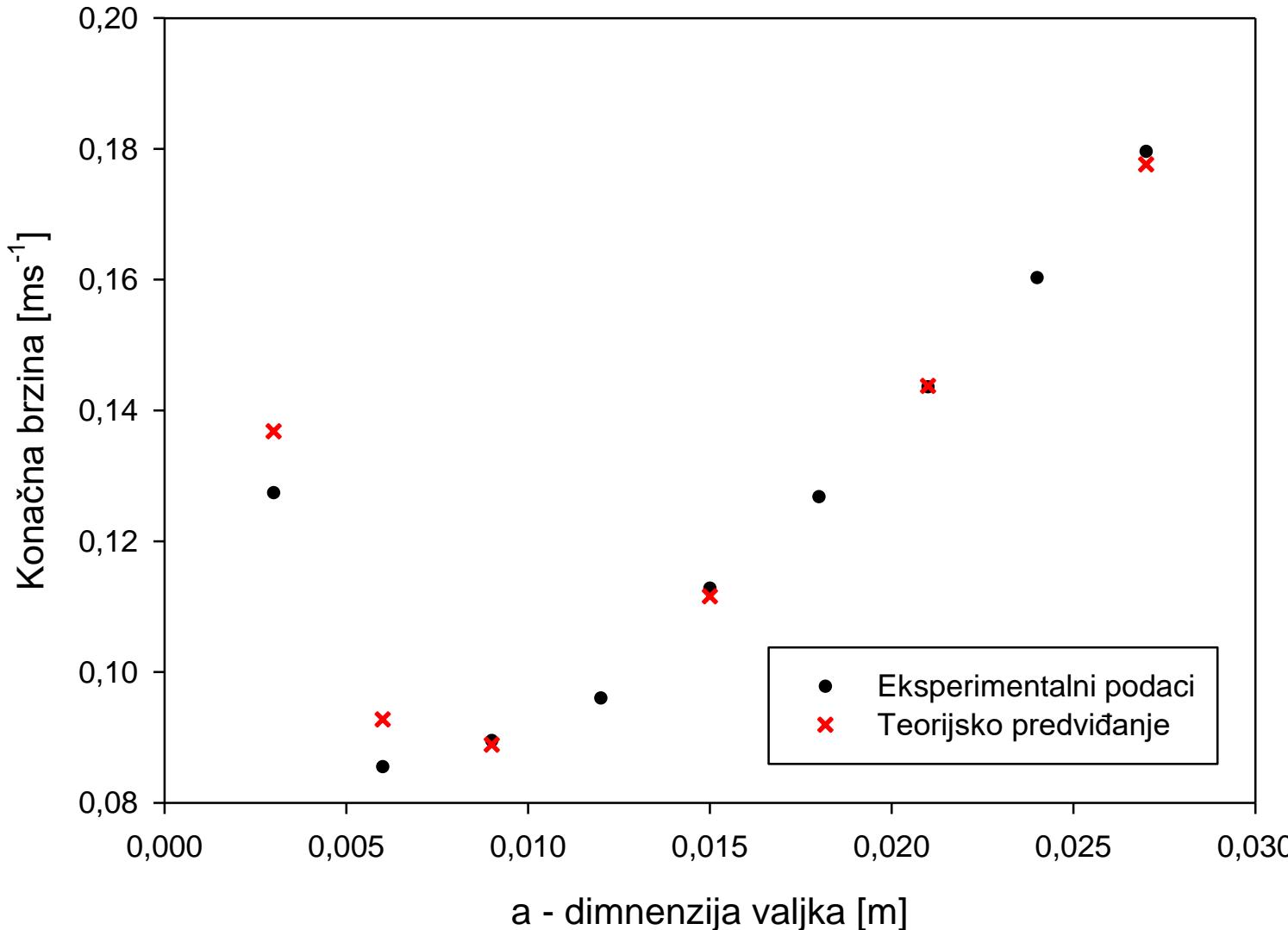
$$v_0 = \frac{2\pi\rho_m m_{mag} g}{\Delta\rho\sigma k}$$

Istu formulu smo dobili i preko energije

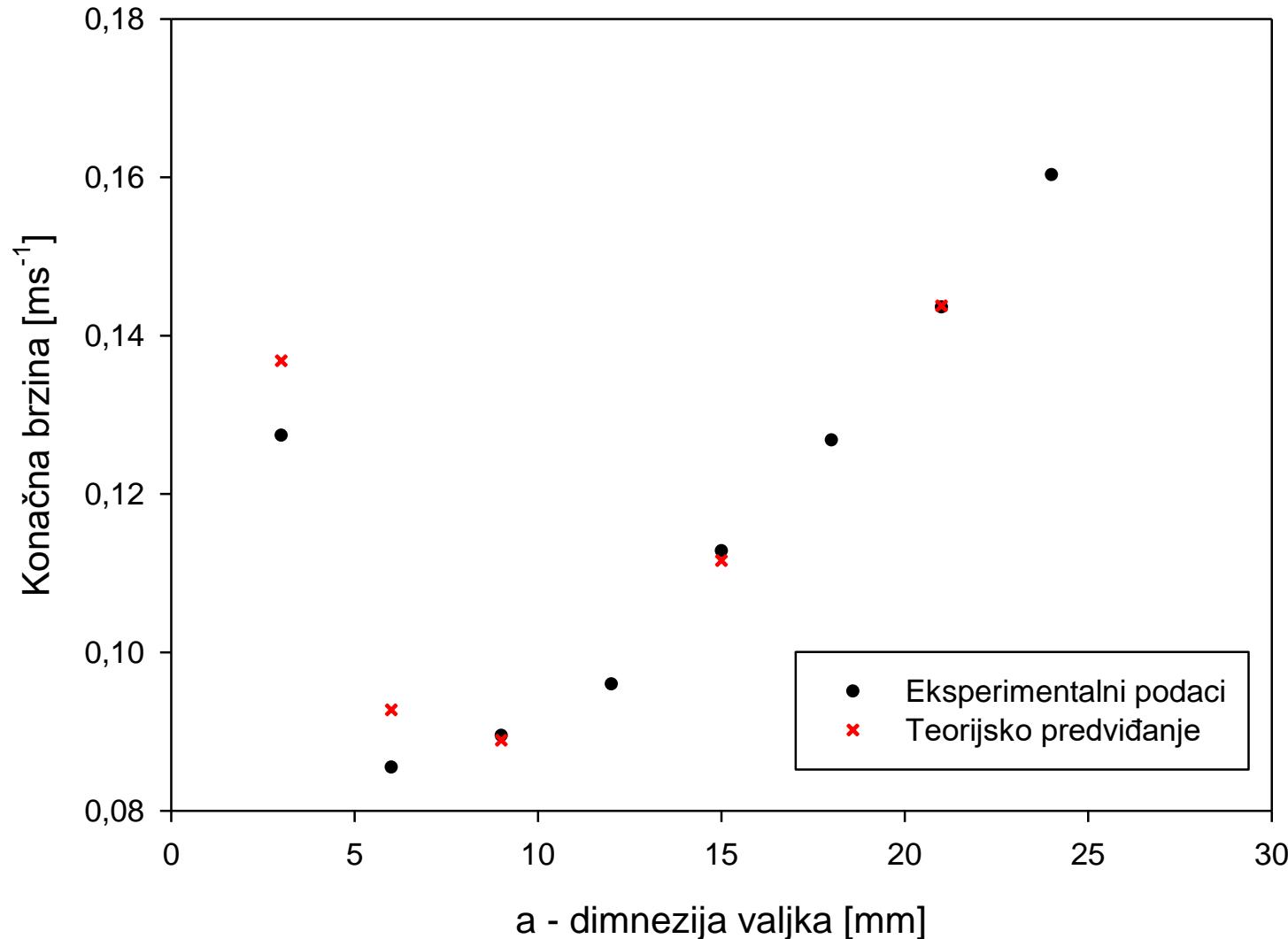
Integral kvadrata derivacije magnetskog toka po prostoru



Ovisnost konačne brzine magneta o njegovoj visini - Cu



Ovisnost konačne brzine magneta o njegovoj visini - Al



Konačna brzina - dipol

- Kuglasti magnet – radius 2.5 mm
- Aluminijска цјев

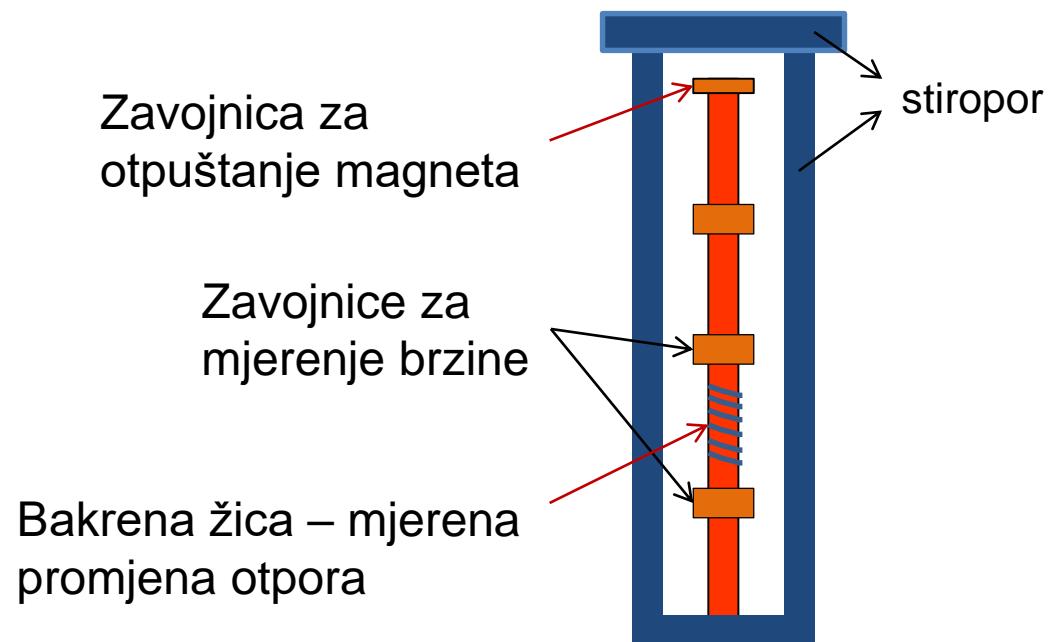
Teorijska brzina	Eksperimentalna brzina
0.458 ms^{-1}	$(0.452 \pm 0.012) \text{ ms}^{-1}$

$$v_{0t} = \frac{256dg}{15\pi\sigma(\mu_0 M)^2} \cdot \left(\frac{\rho_m}{a}\right)^3 \left(\frac{\rho_m}{\Delta\rho}\right)$$

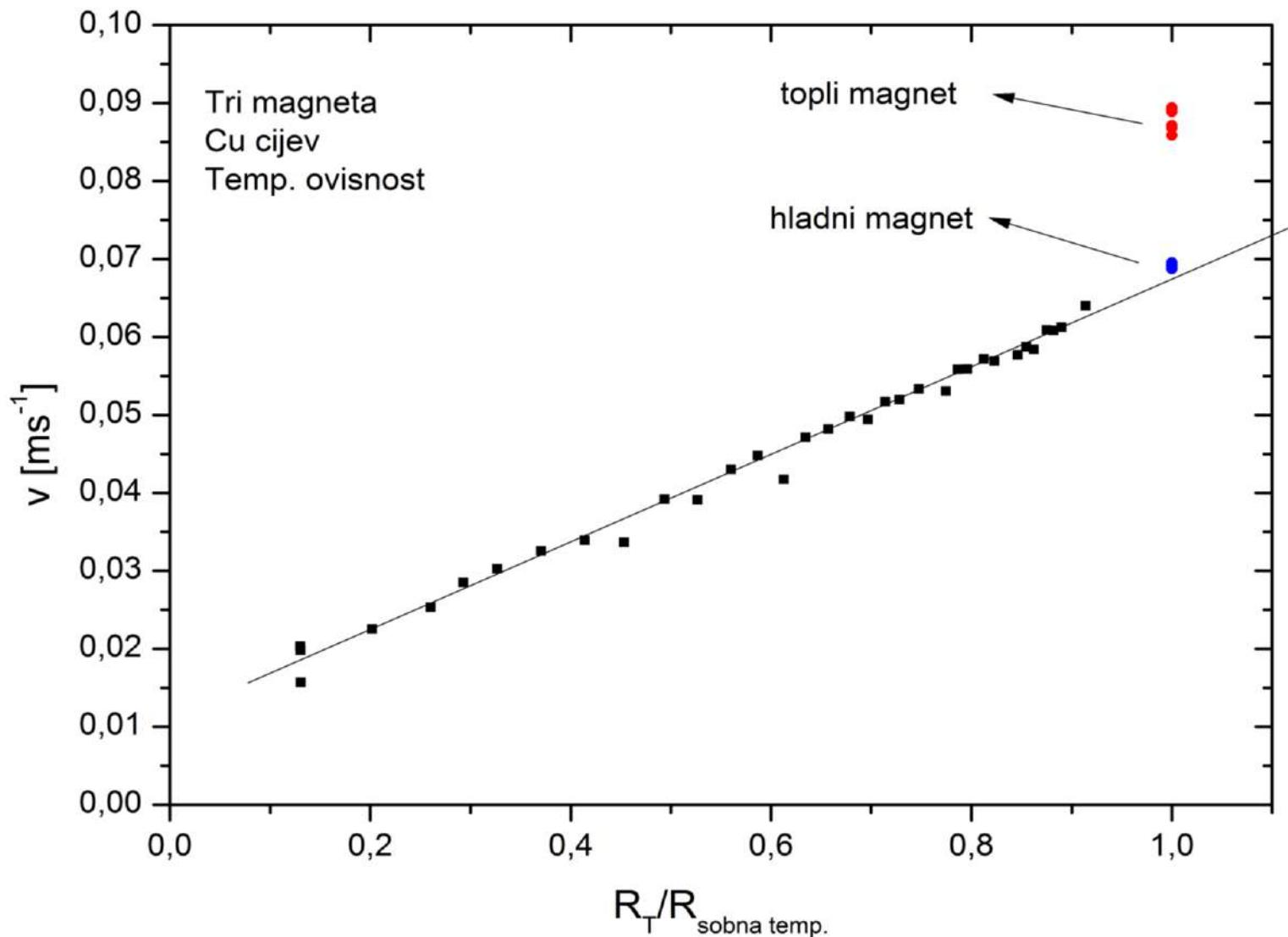
d – gustoća magneta
 a – radius kuglice
 v_{0t} – teorijska brzina

Mjerenje brzine u ovisnosti o vodljivosti

- U spremnik s cijevi se stavio tekući dušik, nakon što se cijev ohladila dušik se izlio → cijev se sporo grijala
- Magnet je bio stalno hlađen na temperaturu dušika $\approx 77\text{K}$ (stalna magnetizacija $M_{dušik} = 1.13M_{sobna\ temp.}$)
- Promjenu vodljivosti je mjerena preko otpora bakrene žice



Ovisnost brzine o vodljivosti



$$\nu \propto \frac{1}{\sigma}$$
$$R \propto \frac{1}{\sigma}$$

Teorijska promjena brzine magneta 1/2

- 2. Newtonov zakon za magnet u cijevi:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_{mag}$$

- Nakon uvrštavanja i riješavanja jednadžbe dobivamo:

$$v(t) = \tau g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

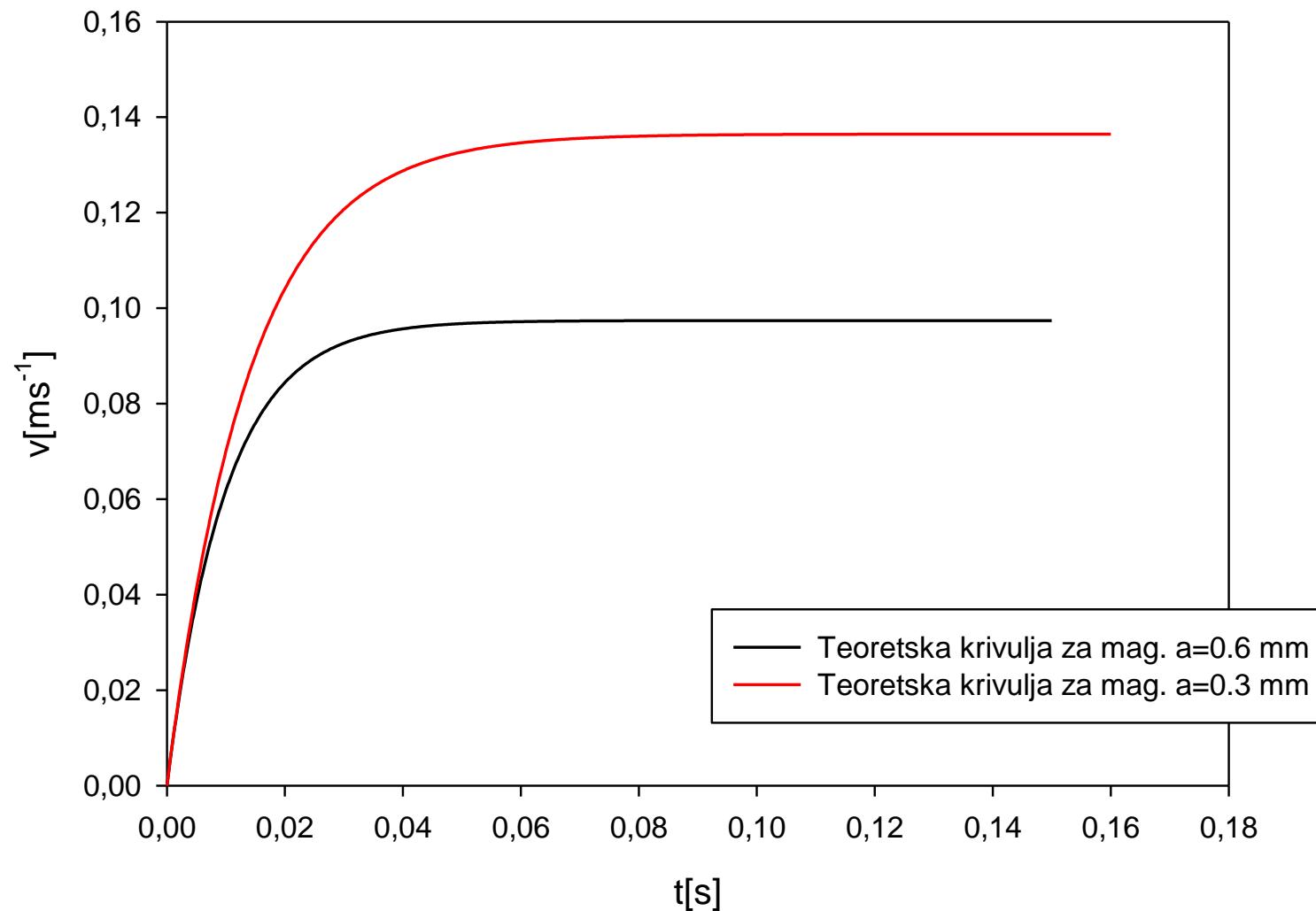
Supstitucija:

$$\tau = \frac{2\pi\rho_m m_{mag}}{\sigma\Delta\rho k}$$

Za 1 valjkasti magnet i korišteni postav:

$$\tau = 0.0139$$

Teorijska promjena brzine magneta 2/2



Zaključak

- Kvalitativno i kvantitativno je opisano što se događa kada magnet pada kroz nemagnetičnu metalnu cijev
- Dobiveno je analitičko rješenje sile na dipol koji pada kroz cijev
- Mjerene su i teorijski predviđene konačne brzine magneta
- Mjerena je brzina u ovisnosti o vodljivosti cijevi
- Određen je oblik krivulje koji opisuje promjenu brzine

Literatura

1. Valery S Cherkassky, Boris A Knyazev, Igor A Kotelnikov, Alexander A Tyutin; Eur. J. Phys.; Breaking of magnetic dipole moving through whole and cut conducting pipes
2. Edward M. Purcell; Electricity and Magnetism Berkley physics course – volume 2, Second Edition; McGraw-Hill book company; 405. – 411.str.

Hvala

Domagoj Plušćec

Model izведен preko snage

- Kako bismo provjerili model, isti smo izveli i preko izmjene snage
- Kada magnet postigne konačnu brzinu vrijedi

$$P_{stрује} = P_{grav}$$

$$P_{stрује} = I^2 R$$

Nakon uvrštavanja dobivamo

$$P_{stрује} = \frac{\Delta \rho \sigma v_0^2}{2\pi \rho_m} k$$

$$v_0 = \frac{2\pi \rho_m m_{mag} g}{\Delta \rho \sigma k}$$

Supstitucija

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz$$

Promjena magnetizacije magneta

$$\begin{aligned}v &\propto \frac{1}{M^2} \\ \frac{v_{topli}}{v_{hladni}} &= \frac{M_h^2}{M_t^2} \\ M_h &= M_t \sqrt{\frac{v_{topli}}{v_{hladni}}}\end{aligned}$$

Za naš slučaj:

$$M_h = 1.13M_t$$