

XV. GIMNAZIJA

# Problem 17. Fire hose

---

Stjepan Petruša

Mentor: Una Pale

## Sadržaj:

Tema	Stranica
1. Uvod	2
2. Aparatura i mjerenja	2
2.1. Aparatura	2
2.2. Mjerenja	2
3. Teorija	4
3.1. Pojmovi	4
3.2. Pretpostavke	5
4. Rezultati	6
4.1. Zakonitosti osnovnog gibanja crijeva	6
4.2. Utjecaj sile na period gibanja crijeva	8
5. Zaključak	10
6. Literatura	11

# 1. Uvod

Problem: „Consider a hose with a water jet coming from its nozzle. Release the hose and observe its subsequent motion. Determine the parameters that affect this motion“

Razmatrajte crijevo kroz čiji izlaz, tj. vrh izlazi snop vode. Pustite crijevo i promatrajte posljedično gibanje. Razotkrite koji parametri utječu na to gibanje.

Zadatak je prilično jasan, mijenjanjem raznih parametara potrebno je otkriti kako oni utječu na gibanje crijeva.

## 2. Aparatura i mjerenja

### 2.1. Aparatura

Korišteno je silikonsko crijevo različitih duljina i polumjera otvora ( $r = 1.5\text{mm}, 3\text{mm}, 4\text{mm}$ ). Korišteno je silikonsko crijevo jer se obična vrtna crijeva prilikom „prijeloma“ oštete na tome mjestu, te više nije moguće izvoditi točna mjerenja jer bi se crijevo savijalo samo u jednu stranu. Vrtno crijevo je teško modificirati, odnosno nakon dugog stajanja u pakiranju u kružnom položaju teško je izravnati crijevo da bude potpuno ravno kako bi mjerenja bila točna, što je kod silikonskog crijeva zbog samih karakteristika silikona bilo moguće ostvariti bez problema. Mjerenja su mogla biti ostvarena na dva načina, mijenjanjem polumjera samog crijeva (uz uvjet da je polumjer na izlazu jednak i na ostatku crijeva) i mijenjati crijeva s različitim polumjerima, ili da se koriti konstantni polumjer crijeva, a na izlazu se pomoću šmrka mijenja radijus izlazne površine.

Od ostalog materijala i aparature korišteno je: high-speed kamera, zaporni sat i posuda s mjernom skalom.

Crijevo je potrebno spojiti na konstantan izvor vode s regulatorom protoka kako bi se moglo izvršiti više mjerenja i usporediti ih. Zaporni sat i posuda s mjernom skalom se koristilo za određivanje, tj. mjerenja volumnog protoka vode kroz određeno crijevo.

### 2.2. Mjerenja

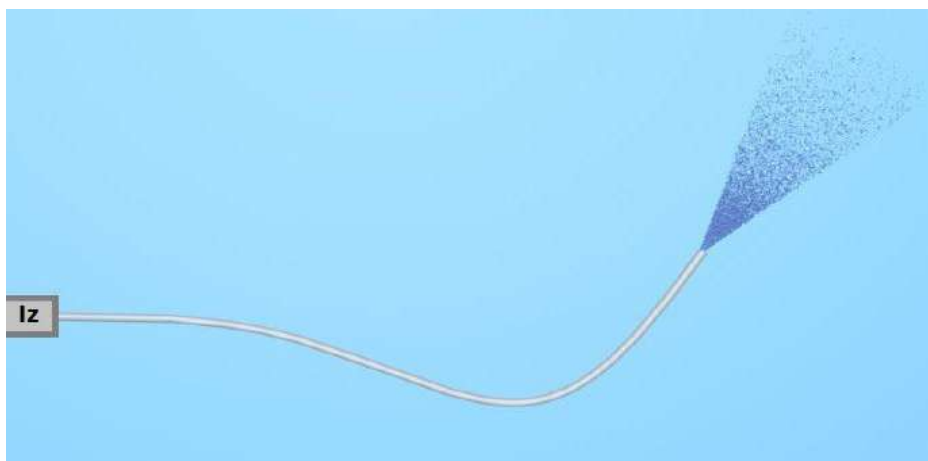
Mjerenja su se sastojala od dva dijela koja su se temeljno razlikovala u fluidu koji je tekao kroz crijevo. Prvi dio je uključivao mjerenje pri prolasku vode kroz zadano cijeno, a drugi dio pri prolasku zraka kroz crijevo. Naravno u drugom dijelu crijevo nije bilo spojeno na izvor vode nego na zračni kompresor pomoću kojeg se ispuštao zrak kroz crijevo. Također u prvom dijelu se mjerio volumni protok vode kroz crijevo, dok se u drugom dijelu očitavao tlak na kompresoru. Naravno iz oba mjerenja se mogla izračunati sila i brzina tečenja, odnosno tlak u prvom dijelu. Razlika u rezultatima mjerenja se nalazi u samoj strukturi fluida koji je tekao. Voda je

viskozija od zraka, te je stvarala veće trenje između samoga fluida i crijeva pa je oblik gibanja malo različit od onoga gdje se gibao zrak koji je mnogo manje viskozian. U drugom dijelu smo naišli na jedan mali problem. Tijekom puštanja zraka kroz crijevo kompresor se praznio i tako se i tlak pod kojim je zrak izlazio smanjivao, no kompresor se nakon što se smanji tlak do određene granice automatski počinje puniti. Na žalost kompresor se nije punio dovoljno brzo koliko se brzo praznio, pa je došlo do konstantnog smanjenja tlaka zraka.

Nakon izvršenih rezultata shvaćeno je kako je razlika vrlo mala, no kako bi se smanjila pogreška samoga rezultata, i pošto se u početnom problemu tražilo kako tok vode utječe na gibanje, ta mjerenja se neće razmatrati kao važna za rješavanje ovog problema.

Tijekom mjerenja mijenjala se duljina samoga crijeva, te se samo crijevo mijenjalo s onime drugog polumjera, odnosno poprečnog presjeka.

Gibanja su se snimala high-speed kamerom koja je snimala 120 slika u sekundi. Zatim se snimke obrađene u programu ImageJ. Podaci o volumnom protoku, sili, tlaku i brzini su obrađeni u programu SigmaPlot.



Slika 1: Pogled iz perspektive kamere

Na slici 1 iznad se vidi pogled koji je imala kamera tijekom snimanja. Pošto se snimalo na horizontalnoj podlozi kamera se morala nalaziti dovoljno iznad crijeva kako bi mogla uhvatiti u cijelu kadar gibanje crijeva. Na skici iznad oznakom Iz je označen izvor vode.

Također se razmatrala mogućnost mjerenja kada se crijevo nalazi u vertikalnom položaju u odnosu na tlo. Odabrano je mjerenje pri horizontalnoj površini zbog manje pogreške, jer bi se prilikom vertikalnog mjerenja javilo i gibanje u 3. stranu što bi onda bilo teže za analizirati, a za mjerenja bi se onda trebalo nabaviti dodatni pribor kao što je dodatna kamera. U horizontalnom mjerenju gibanje u 3. stranu je riješeno na vrlo prirodan način. Pošto crijevo i voda imaju masu, na njih djeluje silateža koja poništava silu koja bi tjerala crijevo da se giba u stranu gore-dolje, odnosno u smjeru paralelnim s vektorom površine zemlje. Rezultati oba mjerenja,

ako se zanemari gibanje u 3. smjeru pri vertikalnim mjerenjima, bi trebala jednaka jer se radi o jednakom fluidu i crijevu, što uključuje i jednak poprečni presjek i duljinu. Jedina razlika je u smjeru djelovanja sile teže, pa bi se u rezultatima izlazna sila trebala umanjiti za iznos sile teže koja djeluje na vodu, što sa sobom povlači i mijenjanje ostalih parametra kao što su brzina vode, tj. volumni protok.

## 3. Teorija

### 3.1. Pojmovi

**Volumni protok** je volumen fluida koji proteče kroz poprečni presjek crijeva u jednoj sekundi. Pomoću njega se može lako izračunati i brzina kojom fluid teče ako je poznata površina poprečnog presjeka.

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot l}{\Delta t} = A \cdot v$$

$\Delta V$  označava promjenu volumena,  $\Delta t$  promjenu vremena,  $A$  površinu poprečnoga presjeka, a  $v$  brzinu protoka fluida.

**Tlak** je djelovanje pritiskne sile na neku površinu. Jednostavno se izražava kao omjer sile i površine. Pošto mi promatramo fluid koji se giba onda ćemo razmotriti dinamiku fluida iz koje lako dobijemo izraz za dinamički tlak.

$$p = \frac{F}{A} \rightarrow p_{din} = \frac{\rho v^2}{2}$$

$\rho$  označava gustoću fluida koji je u ovdje jednak gustoći vode, odnosno  $1000 \text{ kg/m}^3$ .  $v$  je brzina fluida koja se lako izračuna iz prvotne formule za volumni protok.

U problemu crijevo se ne nalazi u vakuumu nego je u sustavu ispunjenim zrakom, pa moramo i razmatrati i statički tlak koji je kod nas jednak atmosferskom tlaku,  $p_a$ , koji je jednak  $101325 \text{ Pa}$ .

$$p = p_a + \frac{\rho v^2}{2}$$

**Ukupna sila** je umnožak mase tijela i akceleracije koja djeluje na to tijelo. Ovdje nećemo gledati taj izraz nego ćemo iz prijašnjeg izraza za tlak izvući silu. Ovdje se lako primjećuje kako je sila umnožak tlaka i površine na koju taj tlak djeluje. Sila koja će biti razmatrana je sila na vrhu crijevu, odnosno na samom izlazu. Ta sila je ključna

za rješenje ovoga problema jer zbog inercije samoga crijeva i ove sile dolazi do gibanja crijeva.

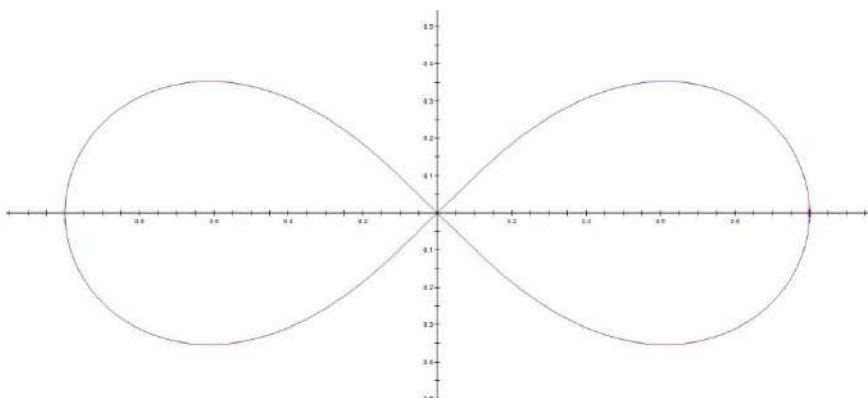
$$F = p \cdot A = \left( p_a + \frac{\rho v^2}{2} \right) \cdot r^2 \pi$$

### 3.2. Pretpostavke

Na početku je bilo razmatrano više pretpostavka ili hipoteza o ishodu rješenja zadanog problema. Prva i najlogičnija pretpostavka je bila kako se crijevo giba kaotično, bez ikakvog ponavljanja ili simetrije. Naravno ta pretpostavka je bila odmah odbačena nakon prvih mjerenja u kojima se vrlo lako primjećivalo ponavljanje.

Zatim dolazi do dvije nove pretpostavke. Prva, koja se temeljila na jednakosti kutova, zagovarala je kako se svaka točka crijeva pomiče u smjeru koji je otklonjen za jednak kut s obzirom na prijašnju točku. Ta pretpostavka bi zahtijevala jedino ovisnost ukazanog kuta o ostalim parametrima koji karakteriziraju tok vode kroz crijevo. Nakon obrađenih mjerenja ova hipoteza se pokazala pogrešnom, dok se druga pokazala točnom.

Druga pretpostavka prikazuje kako se svaka točka crijeva giba po putanji nalik na simbol znaka beskonačnosti ili okrenute osmice ( $\infty$ ). Veličina putanje ovisi o udaljenosti točke od fiksne, tj. početne točke. Putanja svake individualne točke crijeva se može prikazati pomoću grafa Bernoulijevelemniskate, odnosno  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)^2$ , ili  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  ako se računa u polarnom koordinatnom sustavu. Gdje je  $a$  realni parametar.



Slika 2: Graf Bernoulijevelemniskate kada je parametar  $a$  jednak 1

Na kraju se lako zaključuje kako je potrebno jedino povezati parametar  $a$  s pravim mjerenjima. Kao rezultat bi trebao bi ispasti funkcija u kojoj bi se uz mijenjanje parametra  $a$ , koji će ovisiti o udaljenosti točke od ishodišta, dobila funkcija koja

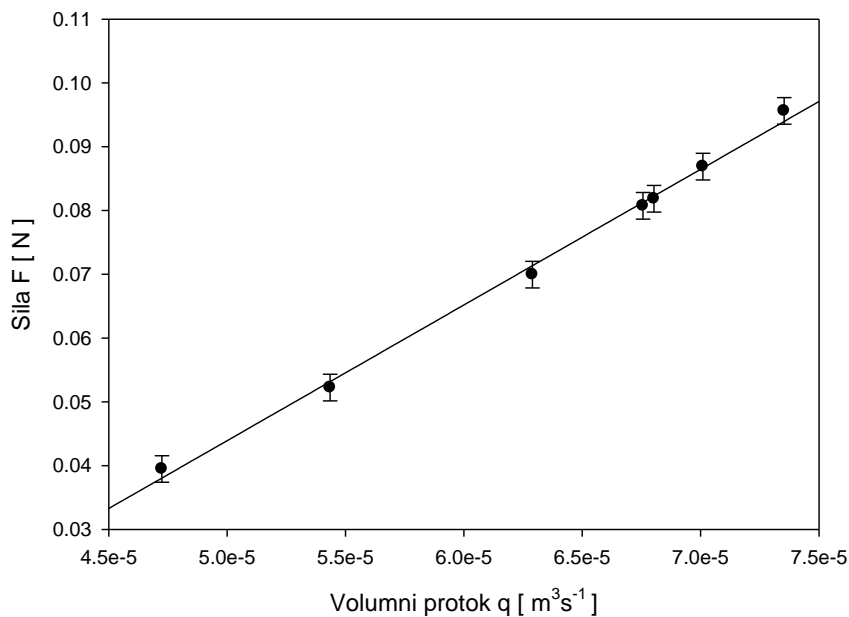
opisuje putanju određene točke crijeva. No, ukoliko su u koordinatni sustav ucrtali dovoljno grafova za različite duljine dobiva se informacija kako je crijevo uvijek ravno, zato postoji još jedan faktor, a to je početni pomak. Odnosno svaka točka je pomaknuta u odnosu na graf prijašnje točke.

## 4. Rezultati

### 4.1. Zakonitosti osnovnog gibanja crijeva

Nakon prikupljenih i obrađenih podataka lako možemo grafički prikazati gibanje crijeva. Pošto će gibanje biti većinom uspoređivano s izlaznom silom koja je izračunata prema danoj formuli, tada iz  $F, q$  grafa ovisnosti sile o volumnom protoku lako se primjećuje kako je ta povezanost linearna.

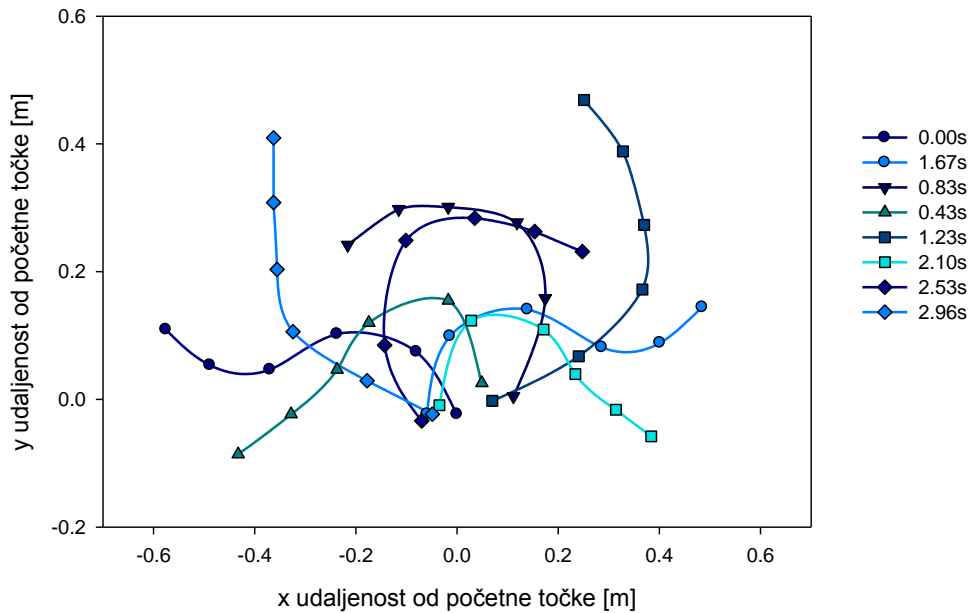
Ovisnost sile o volumnom protoku



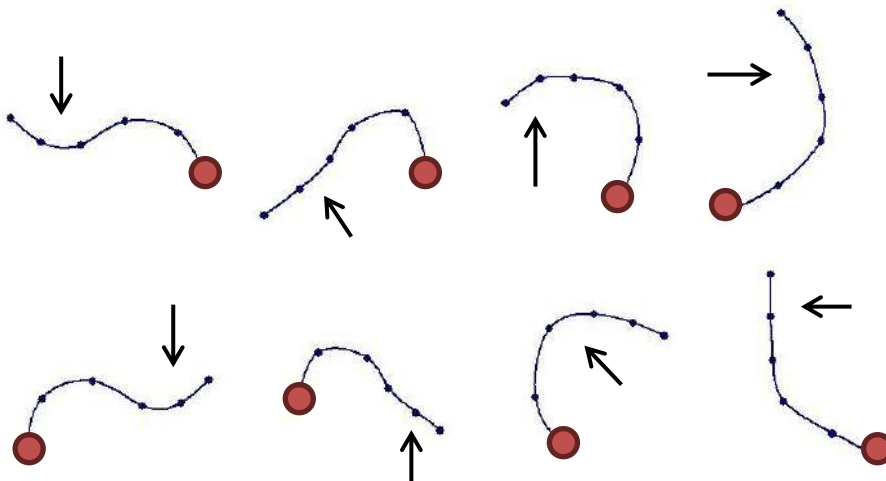
Pošto se crijevo giba u realnom vremenu biti će potrebno uvesti još jedan pojam, a to je period gibanja jer se svaka točka „kružno“, odnosno periodično giba, jer nakon određenog vremena se vraća u početni položaj i započinje ponovno isto gibanje. Pošto je crijevo određene duljine, napotrebno je provjeravati maksimalne udaljenosti završnih, odnosno vršnih točaka crijeva o ishodištu jer se crijevo neće značajno produljiti ili skratiti.

Sada kada je sve potrebno objašnjeno, onda je sljedeći graf

Ovisnost položaja točaka crijeva o vremenu pri izlaznoj sili od  $8.69 \cdot 10^{-2} \text{N}$



Makar na prvi pogled graf izgleda vrlo zbunjujuće i komplicirano, on jednostavno pokazuje položaj crijeva u određenom vremenu. U gornjem grafu prikazano je određeno gibanje pri izlaznoj sili od  $8.69 \cdot 10^{-2} \text{N}$ , gdje je iznos jednog perioda gibanja 2.8s. Ukoliko se gornji graf rastavi pojedine dijelove ovisno o vremenu, onda se vidi točnije gibanje samoga crijeva u dvodimenzionalnom prostoru.

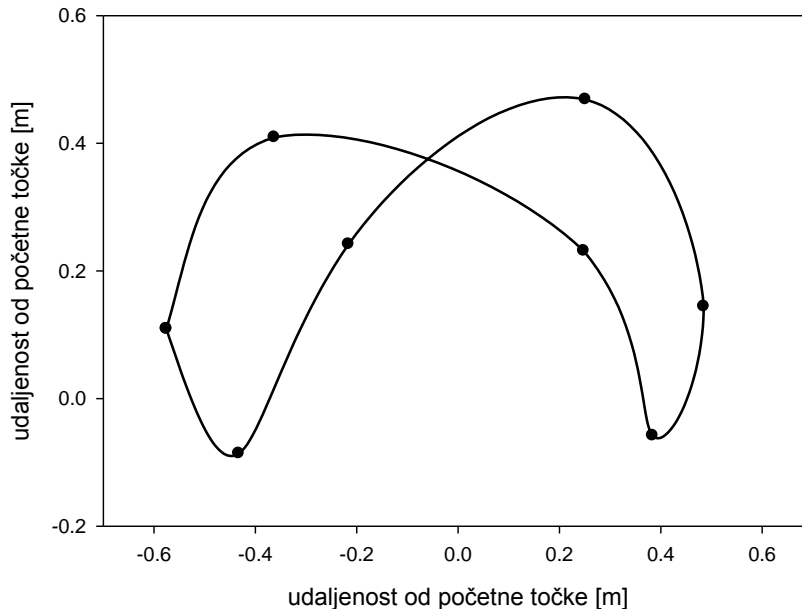


Na gornjem crtežu je prikazano gibanje u pojedinim vremenima u razmacima od  $\frac{T}{8}$ , gdje je T period gibanja.



Promatranje gibanja cijeloga crijeva je dosta teško za prikazati zato se vrlo lako može prikazati gibanje samo jedna točke crijeva, zbog jednostavnosti i veće točnosti ta tu točku je odabrana vršna točka crijeva, odnosno ona na samome kraju gdje voda izlazi iz crijeva. Sljedećim grafom je prikazana ta putanja.

Ovisnost položaja vršnih točaka crijeva o vremenu pri izlaznoj sili od  $8.69 \cdot 10^{-2} \text{N}$

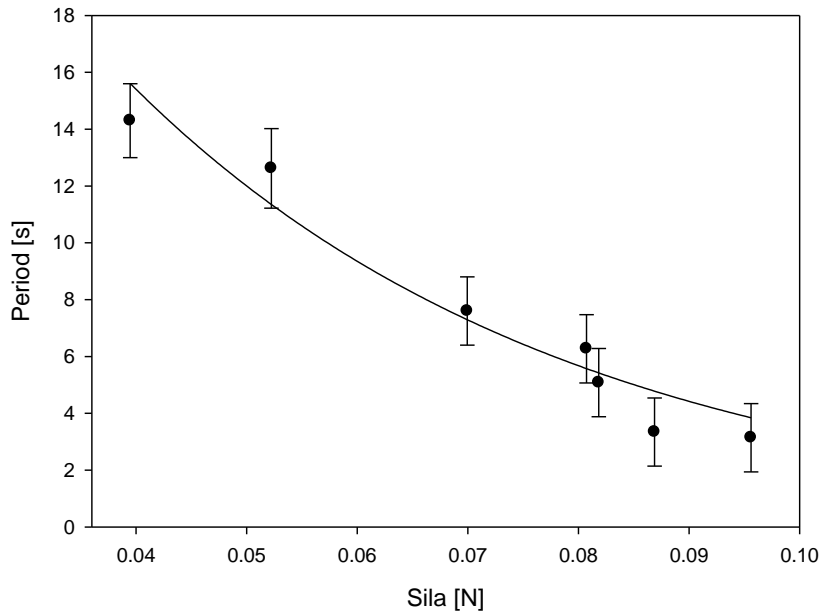


Graf se baš i ne podudara s Bernoulijevom lemniskantom, ali to nije pogrešno. Pošto mi gledamo samo jednu točku čija je pozicija fiksirana u odnosu na cjelokupno crijevo, a činjenica da se crijevo neće razvući ili smanjiti još uvijek vrijedi, tada taj sustav možemo i gledati kao kružnicu s središtem u fiksnoj točki crijeva, odnosno izvoru, a udaljenost točke od ishodišta njezinim radijusom. U grafu Bernoulijevom lemniskante može se povući pravac paralelan s osi x koji siječe graf na točno dva jednaka dijela, te je ujedno taj pravac i os simetrije. Kada se ta os savine, odnosno zakrene, onda se graf lemniskante transformira u dobiveni graf. Naravno sada se zaključuje kako se jednadžba gibanja neće moći tako lako odrediti, no promjenom volumnog protoka putanja gibanja se ne mijenja, nego se mijenja jedino period.

## 4.2. Utjecaj sile na period gibanja crijeva

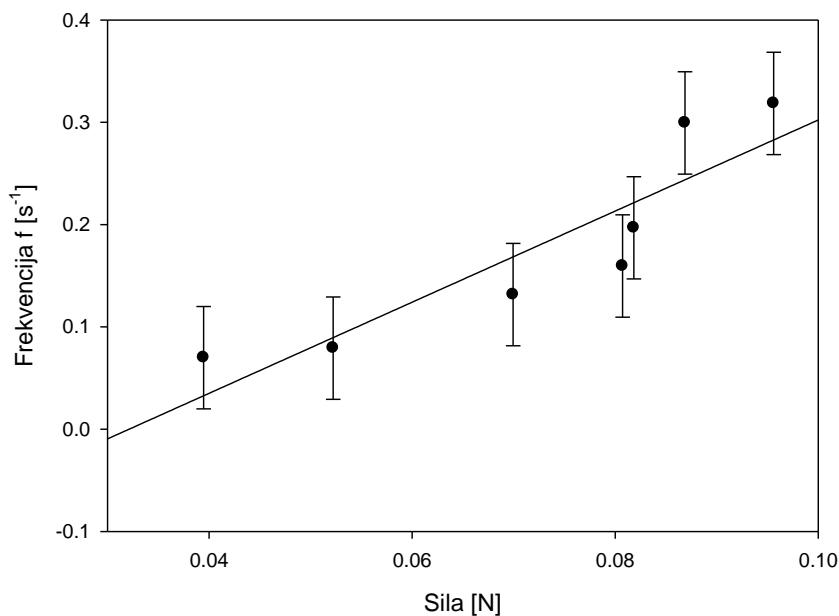
Kada je razmatrano vrijeme koje je potrebno da bi se crijevo vratilo na početni položaj tada u ovisnosti sa silom dobivamo sljedeći graf.

Ovisnost duljine perioda o izlaznoj sili



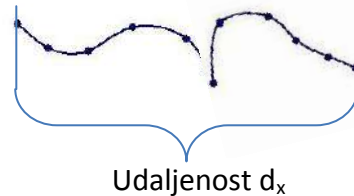
graf bi trebao biti hiperbola, naravno ako se zanemare vanjski utjecaji kao što su sila trenja. Što jačom silom voda izlazi iz crijeva manje vrijeme je potrebno da obiđe jedan period. Uz graf ovisnosti perioda o sili priložen je i graf frekvencije o sili, koji je recipročan gornjem grafu.

Ovisnost frekvencije o izlaznoj sili



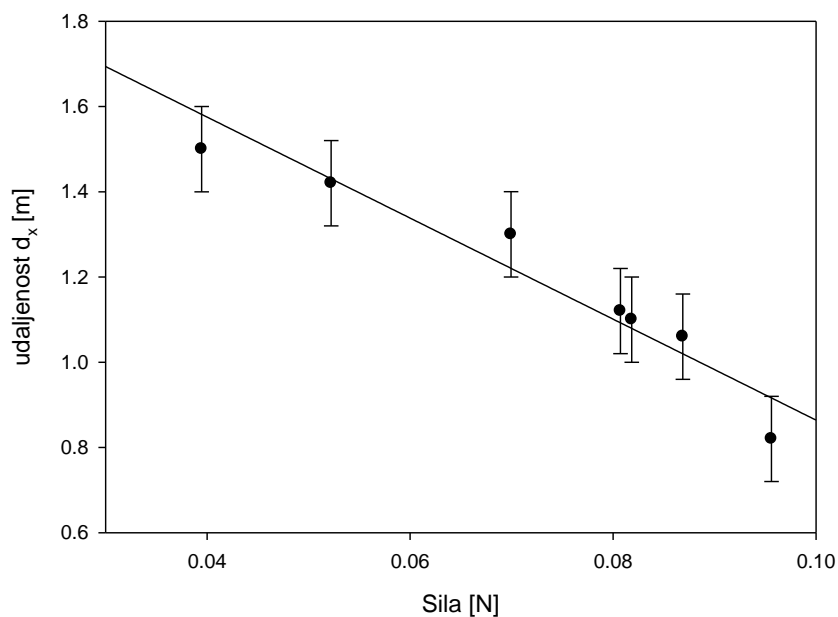
Iz same definicije frekvencije se primjećuje kako onda ovisi o recipročnom periodu, što bi značilo ako je prijašnji graf hiperbola, tada ovaj graf mora biti pravac.

Bilo je rečeno kako se svaka točka crijeva giba po putanji sličnoj grafu Bernoullijevelemniskante, ali da između točaka postoji pomak u poziciji, jer ne mogu sve točke imati jednaku vrijednost apcise i ordinate, jer bi tada cijelo crijevo bilo uvijek ravno i cijelo crijevo bi se gibalo kao jedna točka. Povećanjem izlazne sile taj međusobni pomak se povećava, pa se i maksimalne udaljenosti x osi mijenjaju.



Na gornjem crtežu je prikazana ta udaljenost. A u nastavku je graf ovisnosti te udaljenosti o izlaznoj sili.

Ovisnost udaljenosti  $d_x$  o izlaznoj sili



Naravno dani graf ne pokazuje kako nakon određene sile udaljenost će postati 0, nego u određenoj točki će razlika pozicije između početne i završne točke biti jednaka, pa se se dva crijeva odbijati, a tu onda koristimo teoriju sudara.

## 5. Zaključak

Nakon izvršenih svih mjerenja, analize i obrade podataka, zaključeno je kako gibanje crijeva ovisi najviše o izlaznoj sili koja je proporcionalna s tlakom, površinom poprečnog presjeka, brzinom i volumnim protokom. Veća izlazna sila rezultira manjim periodom gibanja, većom frekvencijom i manjom udaljenošću između krajnjih točaka. Sva mjerenja

su obavljana s crijevima istog materijala pa se zanemaruje tvrdoća i ostala svojstva materijala. Naravno da oni također uzrokuju promjenu gibanja, ali ne toliko drastičnu promjenu da ju je potrebno posebno razmatrati. Većina vrtnih crijeva je izrađeno tako da prilikom savijanja postanu „oštećena“ na toj poziciji i više nije moguće izvršiti točna mjerenja s njima. Pošto se svaka točka giba po putanji sličnoj grafu Bernoullijeve lemniskante, a jednadžba grafa je podosta komplicirana, graf je potrebno zakrenuti u ovisnosti o duljini crijeva, te mnogo parametra bi trebalo unijeti u samu jednadžbu, tako da je vrlo teško prikazati gibanje cijeloga crijeva jednom jednadžbom. Pogreške koje su se pojavile u izvedbi eksperimenta su nejednolika vlažnost tla, što rezultira različitim silama trenja koje utječu na gibanje. Također nepreciznost prilikom računanja, kao što je određivanje koordinata točaka crijeva, može dovesti do manjih fluktuacija u konačnom rezultatu. Prilikom određivanja volumnog protoka posuda se punila vodom do određenog volumena i to se mjerilo zapornim satom, a zbog reakcije ruke može doći do pogreške u rezultatu. U konačnici sam zadovoljan dobivenim rezultatom jer pogreške na grafovima nisu velike, a gibanje se vrlo lako objasni preko navedenih parametra.

## 6. Literatura

1. Nada Brković, Plava zbirka iz fizike I. dio, 2001.
2. Vuk Karadžić, Uvod u termodinamiku, kinetičku teoriju gasova i statističku mehaniku, 1951.
3. Sanja Antoliš, AnetaCopić, Matematika 4, 2010.