

Problem 16. Magnetic brake

Domagoj Plušćec

XV. gimnazija

Sadržaj

| | |
|--|----------|
| 1. Uvod - problem | 2.str |
| 2. Teoretski model | 2.-4.str |
| 3. Aparatura i metode | |
| 3.1. Određivanje promjene magnetskog toka ovisno o udaljenosti od magneta | 4.str |
| 3.2. Određivanje brzine magneta kroz cijev | 5.-7.str |
| 4. Rezultati | |
| 4.1. Ovisnost sile na magnet o udaljenosti od magneta | 8.str |
| 4.2. Derivacija magnetskog toka po prostoru | 9.str |
| 4.3. Integral kvadrata derivacije magnetskog toka po prostoru | 10.str |
| 4.4. Ovisnost brzine magneta o visini magneta | 11.str |
| 5. Zaključak | 12.str |
| 6. Literatura | 12.str |

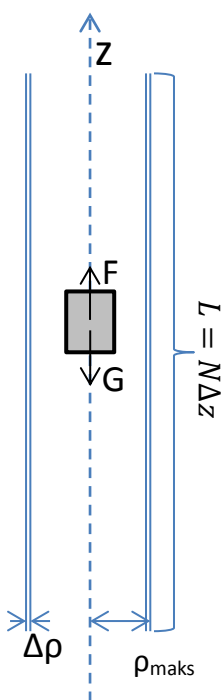
1. Uvod - problem

When a strong magnet falls down a non-ferromagnetic metal tube, it will experience a retarding force. Investigate the phenomenon.

Zadatak traži da se istraži pojava usporavanja magnetu prilikom pada kroz nemagnetičnu metalnu cijev.

Glavni cilj ovog rada je objasniti kakva je to usporavajuća sila koja se pojavljuje, te probati odrediti koji sve parametri utječu na tu silu.

2. Teoretski model



Prilikom kretanja magnetu u odnosu na cijev inducira se struja u cijevi. Cijev ćemo promatrati kao skup od N prstenova visine Δz, debljine Δρ i radijusa

ρ_{maks} .

Prvo ću radi lakšeg razlaganja teorijskog modela definirati magnetski tok magnetu kroz jedan prsten.

(z je koordinata koordinate prstena u z smjeru, a z_0 koordinata središta magnetu)

$$\phi(z - z_0) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\phi(z - z_0) = 2\pi \int_0^{\rho_{maks}} B_z \rho d\rho$$

Struja dI inducirana u jednom prstenu će iznositi:

$$dI = \frac{U}{R} = \frac{-\frac{d\phi}{dt}}{\frac{\sigma * dz * \Delta\rho}{2\pi\rho}} = -\frac{\sigma * \Delta\rho * dz}{2\pi\rho_{maks}} \frac{d\phi}{dt} * \frac{dz_0}{dz}$$

$$dI = \frac{\sigma v_0 dz \Delta\rho}{2\pi\rho_{maks}} * \frac{d\phi}{dz} \quad (1)$$

Sila inducirane struje na magnet će prema trećem Newtonovom zakonu biti istog iznosa kao magnetu na induciranu struju pa slijedi:

$$dF^{mag} = -dI * l * B * \sin\alpha$$

$$dF^{mag} = -2\pi\rho_{maks} * dI * B_\rho \quad (2)$$

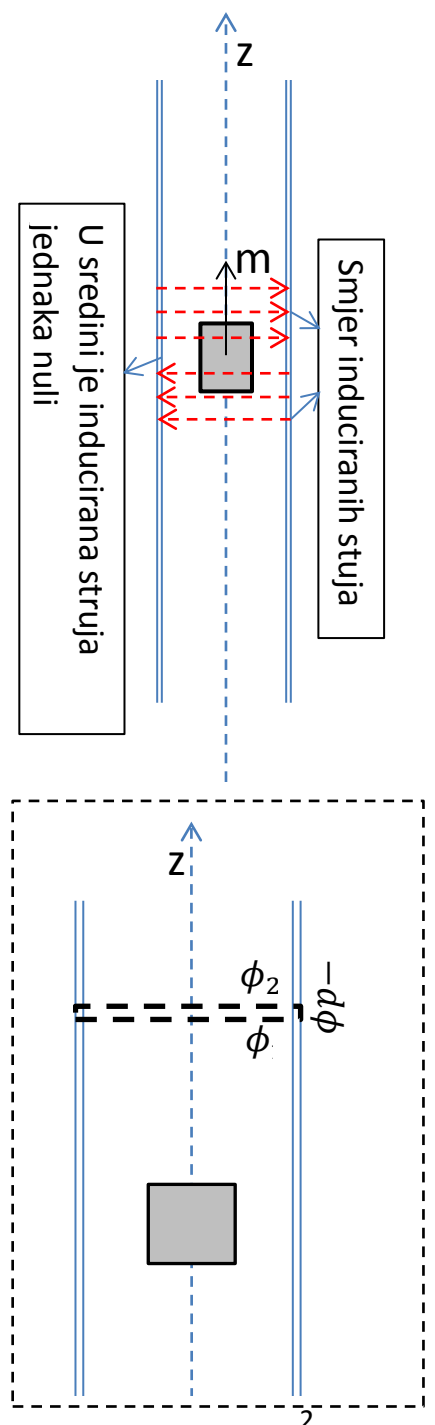
U navedenom izrazu valja još odrediti B_ρ , a on se može izračunati preko Maxwellove jednačbe $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ na sljedeći način:

$$\phi_1 - \phi_2 = -d\phi = 2\pi\rho_{maks} B_\rho dz$$

$$B_\rho = -\frac{1}{2\pi\rho_{maks}} \frac{d\phi}{dz} \quad (3)$$

Nakon uvrštavanja u jednačbu za silu dobivamo:

$$dF^{mag} = \frac{\sigma v_0 dz \Delta\rho}{2\pi\rho_{maks}} * \left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 \quad (4)$$



Zatim možemo integrirati silu između krajeva cijevi koordinata z_1 i z_2 kako bi dobili ukupnu silu:

$$F^{mag} = \frac{\sigma \Delta \rho v_0}{2\pi \rho_{maks}} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz$$

Odnosno ako je magnet dovoljno daleko od rubova cijevi možemo proširiti raspon integracije, te dobivamo sljedeći izraz:

$$F^{mag} = \frac{\sigma \Delta \rho v_0}{2\pi \rho_{maks}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz \quad (5)$$

Model koji je prikazan vrijedi pod pretpostavkama

- da je cijev u obliku valjka (rotacijski simetrična) oko osi z
- da je cijev tanka i da magnet ide manjim brzinama (model ne uzima u obzir skin efekt)
- da je magnetski moment magneta u smjeru osi z (pretpostavljamo da je napon induciran u prstenu cijevi jednak kroz čitav prsten; ujedno ne uzimamo u obzir slučaj kad bi se magnet rotirao tako da mu se mijenja smjer magnetskog momenta)

Model ne uzima u obzir samoindukciju pošto je eksperimentom i probnim izračunom provjereno da je efekt koji bi uzorkovala samoindukcija zanemarivo malen, no dotičnu razliku namjeravam i egzaktnije odrediti.

Promjena magnetskog toka u z smjeru $\left(\frac{d\phi}{dz} \right)$ je određivana eksperimentalno pošto je dotičan izraz teže matematički dobiti za neke oblike magneta pošto je veličina magneta slična promjeru cijevi, te se magnet ne može modelirati kao dipol nego bi se trebao modelirati s kompleksnijim matematičkim funkcijama, no dotična funkcija je i teoretski modelirana za kuglu koja se može smatrati dipolom. Pri čemu je iznos polja dipola u z smjeru jednak: $B_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \right)$ (6) [2].

Magnetski moment m dipola je u smjeru osi z i kut Θ se mjeri od osi z , r predstavlja udaljenost točke od dipola (ishodišta sustava), a z predstavlja udaljenost od magneta u z smjeru

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

Prvo se riješavam kuta kao varijable

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(\frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right)$$

Te zatim želim da mi funkcija jakosti magnetskog polja u z smjeru bude prikazana preko ρ i z pošto će se funkcija kasnije morati integrirati po ρ kako bi se izračunao magnetski tok u jednom prstenu prostora

$$B(z, \rho) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(\frac{2z^2 - \rho^2}{(\sqrt{z^2 + \rho^2})^5} \right)$$

Te magnetski tok iznosi :

$$\phi(z) = \frac{\mu_0 m}{2} \int_0^{\rho_{maks}} \left(\frac{2z^2 - \rho^2}{(\sqrt{z^2 + \rho^2})^5} \right) \rho d\rho$$

$$\phi(z) = \frac{\mu_0 m}{2} \frac{\rho_{maks}^2}{(\sqrt{z^2 + \rho_{maks}^2})^3}$$

Te je zatim izraz za silu jednak:

$$F^{mag} = \frac{9\mu_0 m \sigma \Delta \rho v}{4\pi \rho_{maks}} \int_{z1}^{z2} \frac{\rho_{maks}^3 z^2}{(z^2 + \rho^2)^5} dz$$

Općenito zbog kompleksnosti matematičkih izraza vrijednosti su prilikom uspoređivanja sa eksperimentalnim rezultatima izračunavani numerički pomoću programa. (Napisani u pythonu, c++ ili basicu ovisno o brzini i lakoći implementacije algoritma)

3. Aparatura i metode

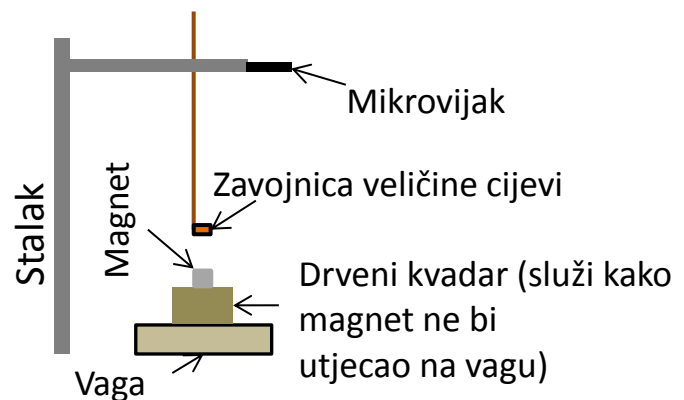
3.1. Određivanje promjene magnetskog toka kroz cijev $\left(\frac{d\phi}{dz}\right)$

Na temelju modela se može dobiti da je sila N namotaja žice na magnet jednaka

$$F = NI * \frac{d\phi}{dz}$$

Napravljen je eksperimentalni postav (kao na skici) u kojem je korištena vaga (preciznost 0.01g), daska montirana na mikrometerski vijak, zavojnica od 40 navoja, promjera jednakog promjeru cijevi, izvor struje.

Pomoću prikazanog postava mjerena je sila, dok smo struju i broj namotaja unaprijed odredili, te smo poznavajući te dvije veličine i mjenjanjem udaljenosti zavojnice od magneta određivali $\left(\frac{d\phi}{dz}\right)$.



3.2. Određivanje brzine magneta kroz cijev

Pribor: cijev s tri zavojnice (zavojnicama se mogao ručno mjenjati položaj), zavojnica koja je služila za otpuštanje magneta, računalo, izvor struje, AD konverter, neodimijski magneti

Ispuštanje magneta:

Pošto sam htio da mjerenje bude što ponovljivije bilo je potrebno osmisliti način kako će magnet biti ispuštan, te da taj proces bude što ponovljiviji. To je značilo da magnetizacija mora uvijek biti u istom smjeru, da se magnet otpušta uvijek s iste pozicije i da se zna točan trenutak kad je magnet ispušten kako bi bilo lakše usporedila mjerenja kad se sustav za mjerenje brzine pomakne (zbog određivanja brzine na različitim mjestima). Najoptimalniji način koji je osmišljen je da se koristi zavojnica kroz koju se pušta struja, te da se u nju stavi magnet koji ne bi padao dok se struja ne prekine. Zavojnica je bila spojena na izvor struje koji je bio spojen na računalo, a u računalu su podešene postavke tako da počne bilježiti mjerenja kad se ugasi strujni izvor na zavojnici koja je otpuštala magnet, a gašenje izvora bilo je vršeno pomoću računala.

Mjerenje brzine:

Brzina je mjerena tako da su se postavile tri zavojnice na cijev te su se serijski spojile preko AD konvertera na računalo. Računalo je mjerilo napon spoja, te bi na taj način prilikom jednog mjerenja dobili tri impulsa kao na grafu ovisnosti napona o vremenu (6.str) pri čemu impulsi imaju karakteristični izgled.

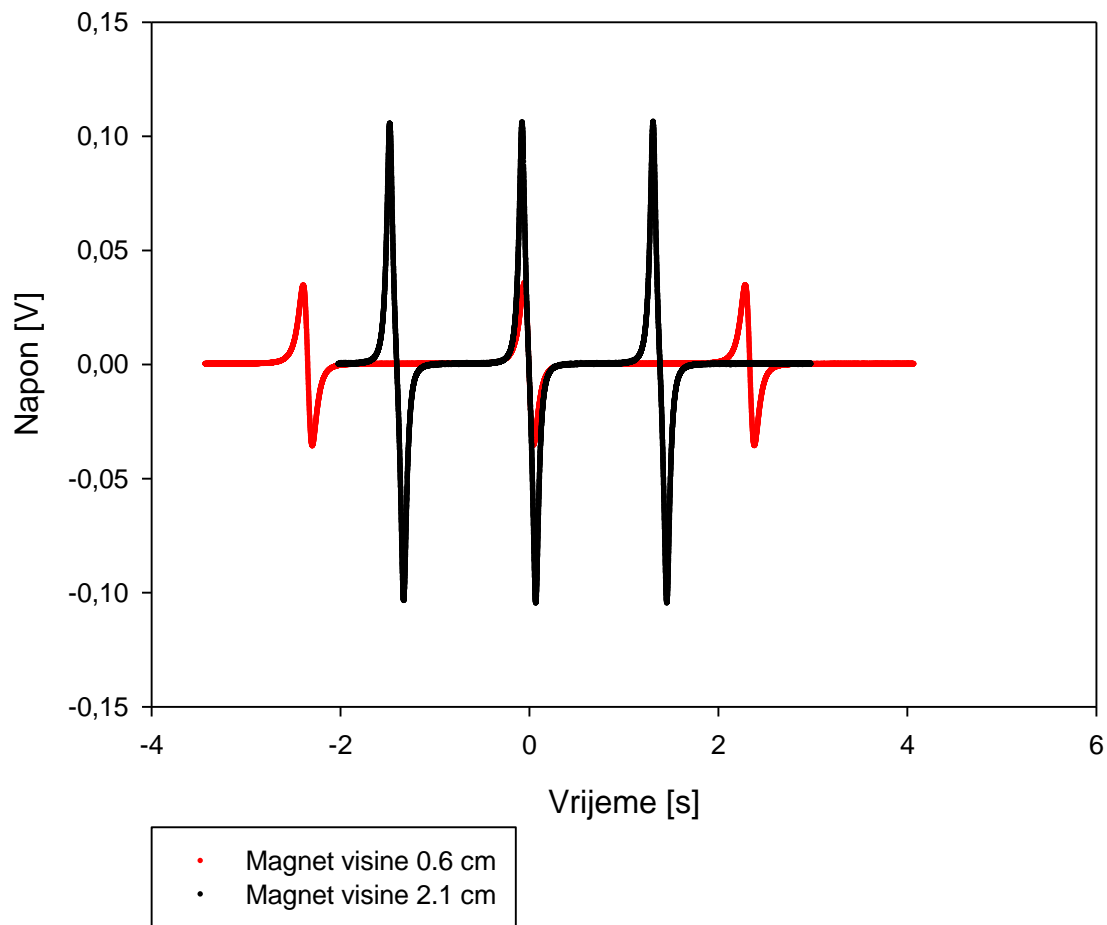
Prvi dio impulsa predstavlja inducirani napon u zavojnici koji bi stvaralo polje koje bi htjelo odbiti magnet od sebe, te zatim prolaz kroz nulu predstavlja prolazak sredine magneta kroz sredinu zavojnice pošto je baš u tom području oko sredine najmanja promjena mag. polja, te nakon toga dolazi dio koji je suprotan od prvog djela koji predstavlja inducirani napon koji je stvarao polje koje želi zaustaviti magnet.



Slika 1 Određivanje udaljenosti između zavojnica

Kako bi se odredila sama brzina iz impulsa se određivao trenutak u kojem je magnet prošao sredinu pojedine zavojnice, te pošto je bila poznata udaljenost između zavojnica mogla se odrediti brzinu, a pošto su bile tri zavojnice moglo se odrediti da li se magnet giba jednoliko ili da li usporava/ubrzava, a pošto je magnet puštan s vrha cijevi s brzinom ≈ 0 on je dosta brzo poprimio konstantnu brzinu.

Ovisnost napona o vremenu



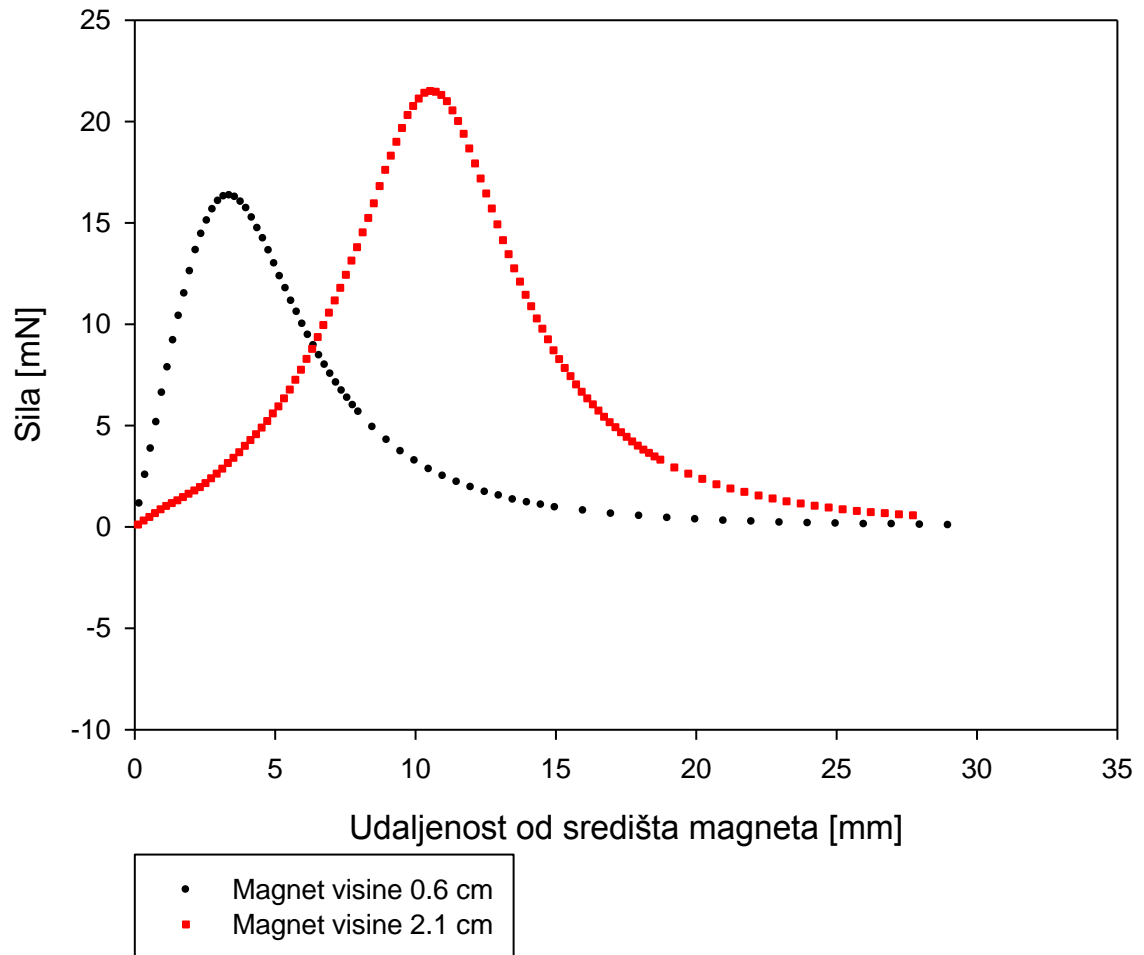
Parametri koji su mjenjani :

- **Vodljivost:** mjenjana je pomoću mjenjanja materijala od koje je cijev rađena (bakar, aluminij, inox), no glavna metoda za mjenjanje vodljivosti je mjenjanjem temperature cijevi. Kako bi temperatura bila što konstantnija cijev je bila obložena sa stiroporom koji je dobar toplinski izolator, te je ostavljeno malo prostora između stiropora i cijevi u koji smo mogli uljevati tekući dušik pomoću kojeg je bilo moguće znatnije mjenjati temperaturni raspon u kojem se cijev nalazila, a ona se tijekom vremena polako grijala. Ujedno smo postavili termočlanak unutar sustava kako bi znali kako se mjenja temperatura, odnosno kako se mjenja vodljivost tijekom vremena.
- **Radijus cijevi:** cilj je odrediti kako promjena radijusa utječe na usporavanje magneta (provjeriti da li je istinita tvrdnja iz teorije da je sila na magnet obrnuto proporcionalna s radijusom cijevi), te odrediti za valjkasti i kuglasti magnet kako omjer radijusa magneta i radijusa cijevi utječe na silu (radijus magneta utječe na oblik magnetskog polja odnosno na iznos $\frac{d\phi}{dz}$ iz teoretskog modela)

- **Oblik magneta:** u eksperimentima smo mjenjali valjkasti, kuglasti magnet (i u obliku kvadra), te je bio cilj moći predvidjeti ako imamo magnete iste magnetizacije koji će se najviše usporiti, a to je direktno povezano s oblikom magneta odnosno oblikom magnetskog polja koji oni stvaraju, te što se polje u prostoru brže mjenja to će sila na magnet biti veća što smo potvrdili usporedbom između valjkastog i kuglastog magneta tako da je kuglasti magnet padao brže.
- **Debljina cijevi i početna brzina magneta:**
Debljinu cijevi je teže mjenjati na način da se zadrži srednji promjer cijevi jednak pošto postoje određeni standardi, no cilj je analizom eksperimenta unaprijediti teoriju tako da se može odrediti nakon koje granice skin efekt ima znatniji utjecaj i kako prilagoditi teoriju, a da zadovoljava i pojavu samog skin efekta. Ujedno je to i glavni razlog zašto želimo mjenjati početnu brzinu magneta, koju je znatno jednostavnije mjenjati nego radijus cijevi, kako bi odredili utjecaj skin efekta na samu pojavu usporavanja magneta.

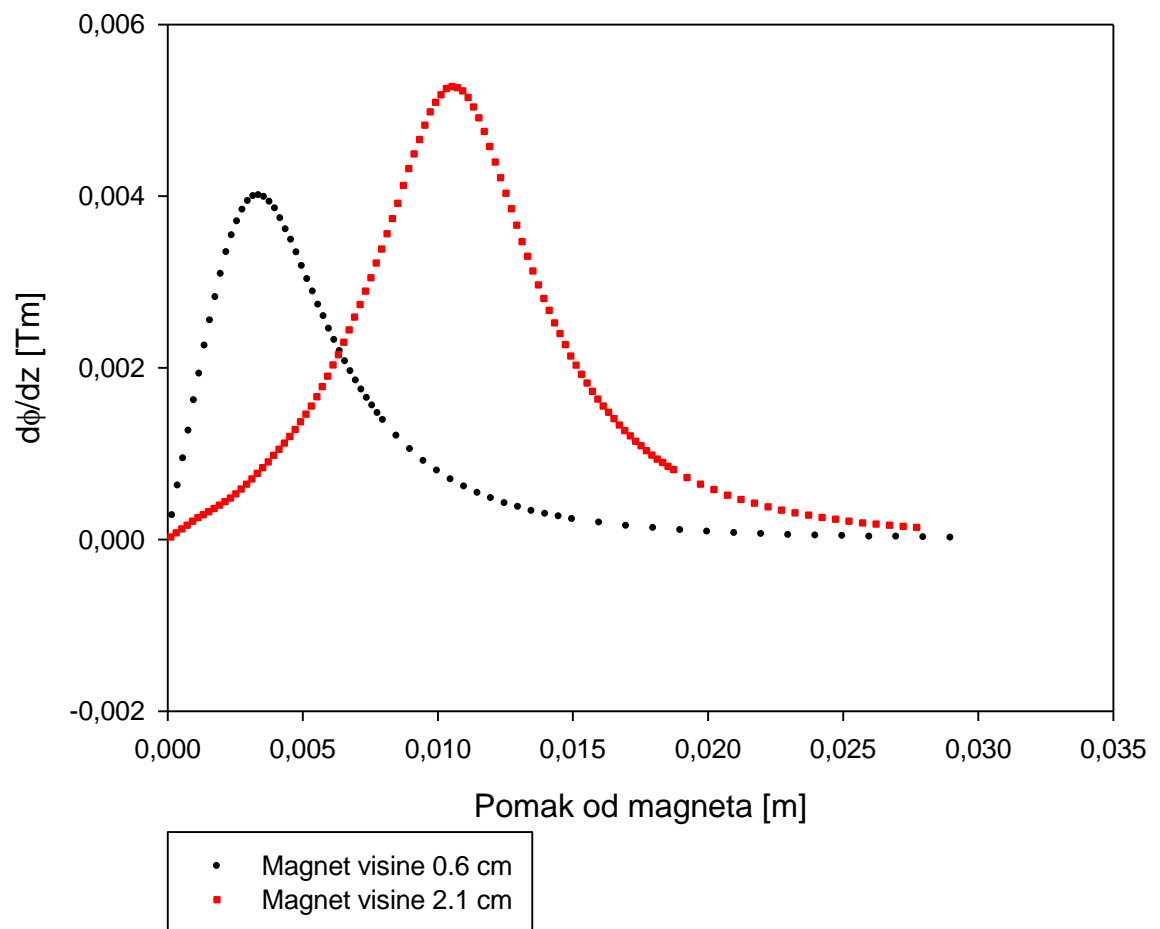
4. Rezultati

4.1. Sila na magnet



Graf prikazuje rezultat mjerenja sile na bakrenu zavojnicu od 40 namotaja, promjera 11 mm, uzrokovana strujom jakosti 1A. Važno je primjetiti kako je nagib rasta sile oko ishodišta veći kod kraćeg magneta jer je promjena magnetskog polja veća na manjoj promjeni udaljenosti od središta.

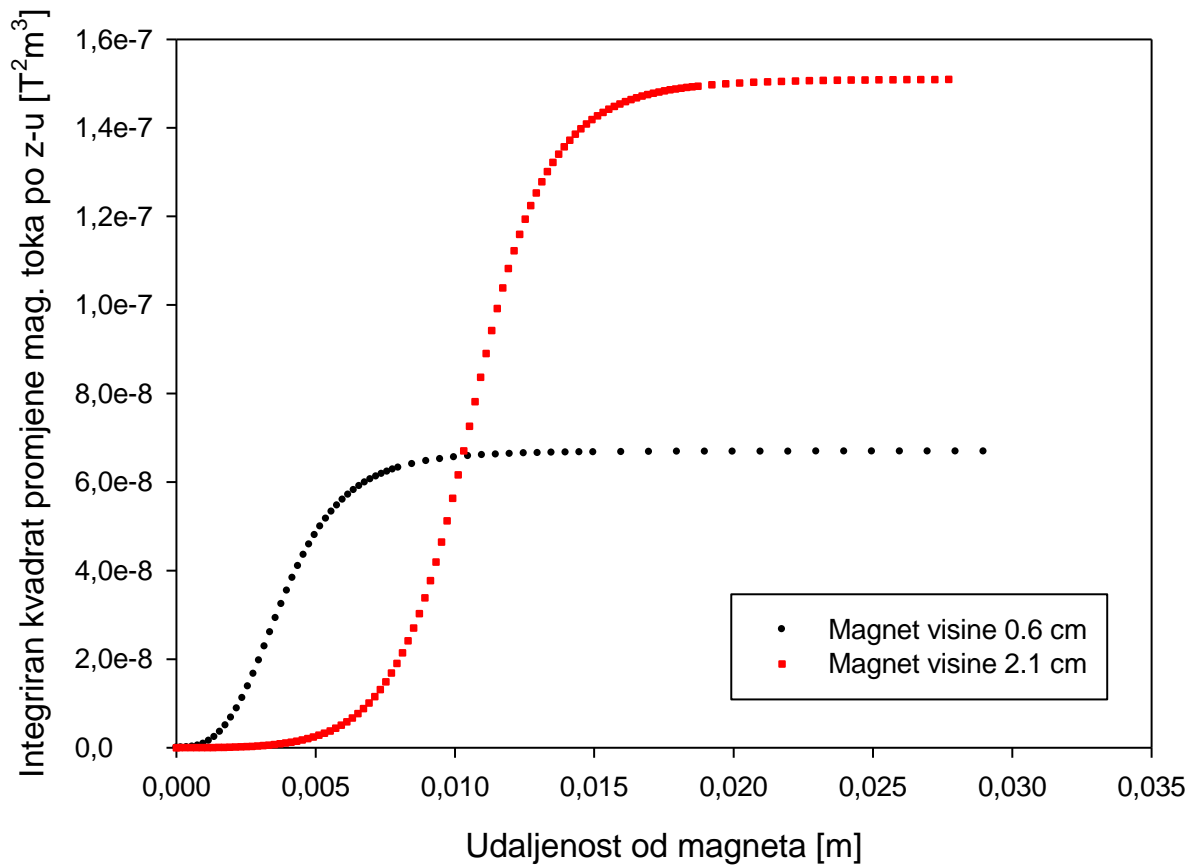
4.2. Derivacija magnetskog toka po prostoru



Graf prikazuje kako se $\frac{d\phi}{dz}$ mijenja u prostoru, te kasnije poznavajući tu funkciju možemo izračunati silu, odnosno konačnu brzinu magneta ukoliko je cijev dovoljno dugačka.

Općenito je zanimljivo primjetiti da se magnetska indukcija u ovom slučaju ponaša kao valni impuls i da ima neka svojstva solitona.

4.3. Integral kvadrata derivacije magnetskog toka po prostoru



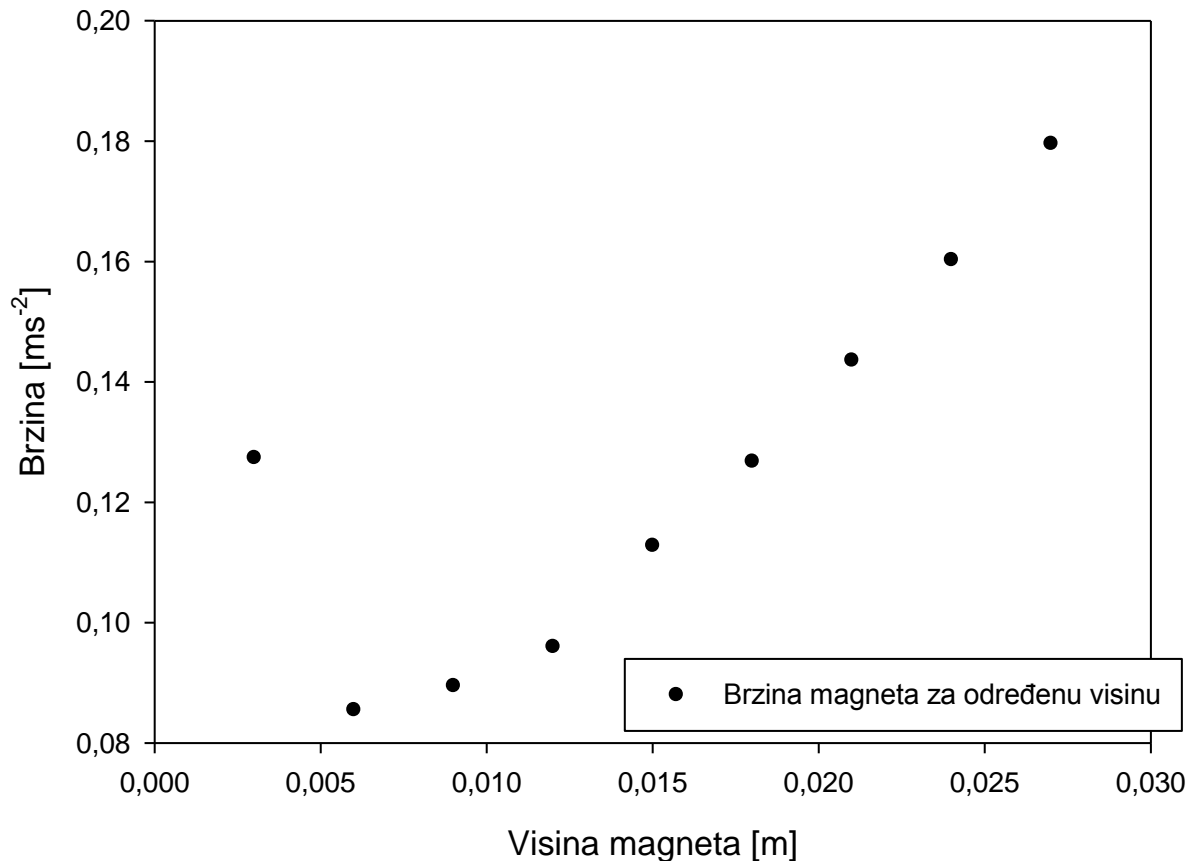
Poznavajući vrijednost(k) kojoj teži funkcija prikazana na grafu možemo odrediti konačnu brzinu magneta (brzinu koju postigne kad se gravitacijska sila i magnetska sila izjednače).

$$mg = \frac{\sigma \Delta \rho v_0}{2\pi \rho_{maks}} k$$

$$v_0 = \frac{2\pi m g \rho_{maks}}{k \sigma \Delta \rho}$$

| Usporedba izračunate i izmjerene konačne brzine magneta | | | |
|---|---------------------------------------|--------------------------------------|--------|
| Visina magneta | Izračunata brzina [ms ⁻¹] | Izmjerena brzina [ms ⁻¹] | Δv |
| 0.6 cm | 0.0836 | 0.0855 | 0.0019 |
| 0.9 cm | 0.0889 | 0.0895 | 0.0006 |
| 2.1 cm | 0.1449 | 0.1436 | 0.0013 |

4.4. Ovisnost brzine magneta o njegovoj visini



Graf prikazuje kako se mjenja konačna brzina magneta o njegovoj visini. (Visinu magneta sam mjenjao tako što sam spajao magnete debljine 0.3 cm)
 Povećanjem magneta povećava se broj prstenova u cijevi u kojima se inducira nezanemariva struja, no ujedno povećanjem magneta se povećava dio u kojem je magnetska indukcija dosta mala jer se oko središta magneta polje manje mjenja u usporedbi s rubovima.

5. Zaključak

U ovom radu je objašnjen fenomen koji se pojavljuje pri padu magneta kroz nemagnetičnu metalnu cijev.

Teorijski model prezentiran u ovome radu može predvidjeti konačnu brzinu magneta uz relativno malo odstupanje čije su uzrok aproksimacija modela, a to su:

- Ne uzimanje samoindukcije u obzir
- Nužnost da magnetski moment bude u z smjeru

Te kako bi račun bio točniji potrebno je točnije odrediti vodljivost cijevi koje su korištene u eksperimentu.

U nastavku rada na ovome radu namjeravam napraviti više mjerenja pošto nisam imao pristup aparaturi tijekom praznika, te probati odrediti utjecaj vodljivosti, radijusa cijevi i skin efekta na fenomen.

6. Literatura

[1] Valery S Cherkassky, Boris A Knyazev, Igor A Kotelnikov, Alexander A Tyutm; Eur. J. Phys.; Breaking of magnetic dipole moving through whole and cut conducting pipes

[2] Edward M. Purcell; Electricity and Magnetism Berkley physics course – volume 2, Second Edition; McGraw-Hill book company; 405. – 411.str.