

IYPT 2021

Problem 7. Bead Dynamics

Filip Vučić

Mentor: Suzana Šijan

Zagreb, studeni 2020.

Sadržaj

1	<i>Uvod</i>	3
2	<i>Teorijski model</i>	3
2.1	Dijagram sila na perlu u obruču	3
2.2	Kinematika perle	5
2.3	Kvalitativna analiza sile trenja	5
2.3.1	Statičko trenje	5
2.3.2	Dinamičko trenje	5
2.4	Postavljanje jednadžbi gibanja	6
2.5	Rješenja jednadžbi gibanja	6
2.5.1	Ravnotežni položaji	7
2.5.2	Kvalitativna analiza oblika gibanja perle	8
2.5.3	Aproksimacija malih kutova	12
2.5.4	Svođenje na eliptički integral	14
2.6	Uvjeti za režim statičkog trenja	16
3	<i>Opis eksperimenta i mjerena</i>	17
3.1	Postav eksperimenta	17
3.2	Opis mjerena	18
4	<i>Analiza rezultata i diskusija</i>	19
5	<i>Zaključak</i>	24
6	<i>Matematički dodatci</i>	24
6.1	Dodatak 1	24
6.2	Dodatak 2	24
6.3	Dodatak 3	25
6.4	Dodatak 4	25
7	<i>Zahvale</i>	26
8	<i>Popis literature</i>	26

1 Uvod

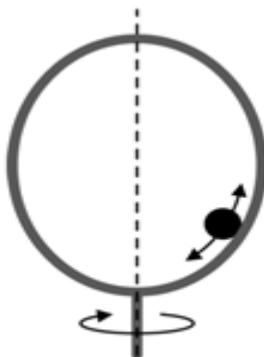
Izvorni tekst problema na engleskom jeziku glasi:

A circular hoop rotates about a vertical diameter. A small bead is allowed to roll in a groove on the inside of the hoop. Investigate the relevant parameters affecting the dynamics of the bead.

Tekst problema u prijevodu na hrvatski je:

Kružni obruč se vrati oko okomite osi. Mala perla se nalazi u žlijebu unutar obruča po kojem se slobodno giba. Istražite relevantne parametre koji utječu na dinamiku perle.

Uz tekst problema na hrvatskom jeziku priložena je i slika 1.



Slika 1. Shematski prikaz problema Dinamika perle [1]

Problem zahtijeva da se istraži odnos među parametrima koji određuju dinamiku, a posljedično i kinematiku, kuglice. U skladu s time što problem traži, prvo valja teorijski modelirati problem i naći analitičko rješenje gibanja kuglice u obruču. Ako pronalazak egzaktnog analitičkog rješenja matematički nije izvediv, onda valja metodama numeričke matematike ili korištenjem računala aproksimirati analitičko rješenje gibanja. Nakon teorijskog modela slijedi opis eksperimentalnog postava (aparature) i opis mjerjenja, a zatim rezultati. U tom dijelu rada podatci mjerjenja bit će prikazani tablično, ali i prikladnim grafičkim prikazima iz kojih će se moći vidjeti opisuje li dobiveno analitičko rješenje dinamiku pretečno. U tom dijelu bit će napravljena i usporedba teorijskog modela s rezultatima mjerjenja. Zadnji dio rada je zaključak. Na kraju su zahvale i prilozi u kojima se nalazi u radu korištena matematika, odnosno rješenja korištenih integrala i diferencijalnih jednadžbi, zatim slijedi popis oznaka, popis tablica te popis korištene literature i ostale reference.

2 Teorijski model

Prethodne studije su pokazale da gibanje perle ima stanovitu sličnost s gibanjem matematičkog njihala, a kako početni kut otklona ima mali utjecaj na period titranja matematičkog njihala, u radu će biti ispitana sljedeća hipoteza:

kutna brzina rotacije obruča ima znatno veći utjecaj na period titranja perle nego početni kut otklona perle.

Temeljna literatura za pisanje ovog poglavlja je [8] i [9]. Time se podrazumijeva da su korištene matematičke i fizikalne metode koje se većinom mogu naći u tim knjigama primjenjene na druge probleme.

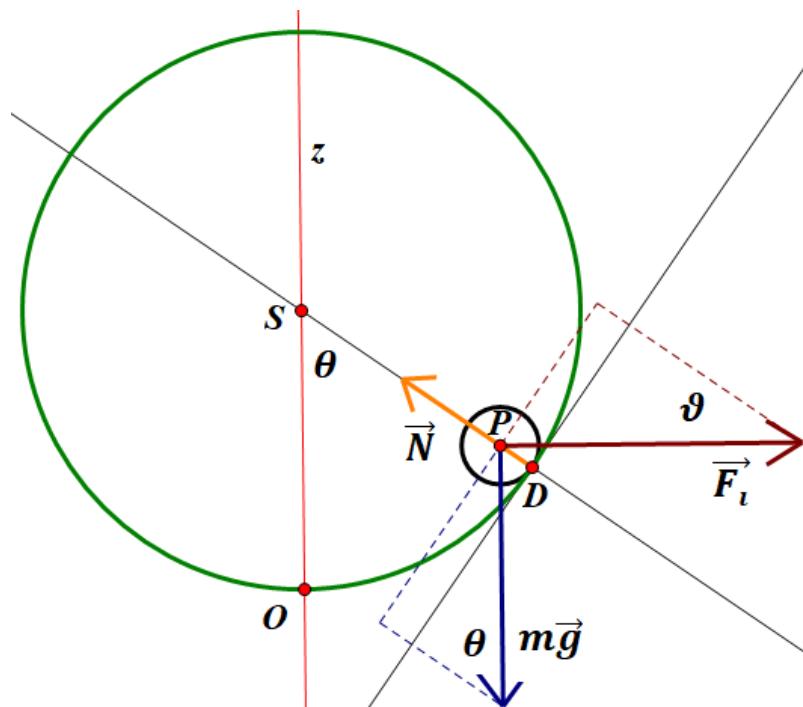
2.1 Dijagram sila na perlu u obruču

Za početak, treba utvrditi koje sile djeluju na perlu mase m polumjera r dok se nalazi u žlijebu obruča polumjera R koji rotira oko svoje vertikalne osi simetrije kao na slici 1. Svakoj sili treba odrediti

hvatište, smjer i orijentaciju. Sile koje djeluju na perlu u sustavu obruča koji rotira su sljedeće:

- težina perle (oznaka $m\vec{g}$) po iznosu je jednaka mg , djeluje iz središta perle i ima isti smjer i istu orijentaciju kao i akceleracija slobodnog pada na Zemlji;
- sila obruča na perlu (oznaka \vec{N}) djeluje iz točke dodira perle i obruča, smjer joj je normalan na obruč (okomit na tangentu u točki dodira), a orijentacija je radijalno prema središtu obruča;
- centrifugalna sila zbog rotacije obruča oko osi simetrije djeluje iz središta perle, smjer je okomit na težinu perle, a orijentacija je od osi simetrije obruča prema van;
- sila trenja¹ djeluje iz točke dodira perle i obruča, a usmjerena je duž tangente na obruč u točki dodira perle i obruča;
- Coriolisova sila djeluje iz središta perle, smjer joj je okomit na ravninu gibanja perle u sustavu obruča, a orijentacija ovisi o vektoru brzine perle u referentnom sustavu obruča.

Coriolisova sila uzrokuje to da se perle giba uz rub žlijeba², ali Coriolisova sila osim spomenutog nema utjecaj na gibanje perle jer djeluje okomito na brzinu kuglice. U skladu s tim razmatranjima na slici 2. prikazan je dijagram sile na perlu kad je ona otklonjena pod kutom θ s obzirom na os rotacije obruča $z \equiv OS$. Na slici 2. nije ucrtana sila trenja jer se njena orijentacija mijenja i nije ucrtana Coriolisova sila jer ona ne utječe na gibanje perle po obruču, već samo na to da se perla giba uz rub žlijeba.



Slika 2. Dijagram sile na perlu otklonjenu za kut θ od osi rotacije obruča

Na slici 2. obilježeni su kutovi θ i ϑ te se odmah uočava da vrijedi $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$. Gibanje će se promatrati u dvodimenzionalnom neinercijalnom sustavu koji rotira zajedno s obručem kutnom brzinom ω (to je u biti referentni sustav obruča), a osi su mu tangenta u točki D dodira perle i obruča i normala u istoj točki. Po tim osima rastavljene su na slici 2. sve sile na komponente, ali se položaj središta perle opisuje u polarnom koordinatnom sustavu čija je polarna os pravac z , a ishodište točka O . Tako se središtu perle P u svakom trenutku gibanja pridružuje kut $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pri čemu se kutovi s jedne

¹ Je li trenje u nekom trenutku statičko ili dinamičko, ovisi o brzini središta perle i kutnoj brzini rotacije perle oko osi kroz središte. Naime, ako se perla kotrlja bez klizanja, onda djeluje statičko trenje, a u suprotnom djeluje dinamičko trenje. Analiza trenja bit će napravljena zasebno i zato ovdje neće biti riječi o orijentaciji trenja.

² Pri tome se zanemaruje trenje između perle i ruba žlijeba.

strane osi rotacije obruča smatraju negativnima, s druge pozitivnima, a os rotacije obruča ima vrijednost kuta koji opisuje položaj $\theta = 0$.

2.2 Kinematika perle

Gibanje perle u sustavu obruča superpozicija je dvaju gibanja, a to su:

- translacija središta perle P obodnom brzinom iznosa $(R - r)\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}$,³
- rotacija perle oko osi kroz središte perle P promjenjivom kutnom brzinom Ω i promjenjivom kutnom akceleracijom α .

Obodna brzina točke D u referentnom sustavu obruča dana je izrazom:

$$v_D = \rho\dot{\theta} + \Omega r, \quad (1)$$

pri čemu je predznak od Ω pozitivan ako se perla kotrlja u pozitivnom smjeru polarnog sustava (onaj smjer u prema kojemu kut raste), a u suprotnom je predznak negativan. Upravo će o vrijednostima izraza (1) ovisiti priroda i orijentacija sile trenja.

2.3 Kvalitativna analiza sile trenja

U odjeljku 2.1 određeni su hodište i smjer sile trenja, no nije određena orijentacija sile trenja i nije određena priroda sile trenja (statičko ili dinamičko trenje). Razlog za to je taj što se te osobine sile trenja mijenjaju tijekom gibanja. Na temelju izraza (1) treba odrediti u kojim se slučajevima pojavljuje statičko, a u kojim slučajevima dinamičko trenje te po mogućnosti orijentacije sile trenja.

2.3.1 Statičko trenje

Statičko trenje uspostavlja se kada se točka D ne giba s obzirom na obruč, odnosno kada je $v_D = 0$. Iz (1) je tada jasno da statičko trenje djeluje ako i samo ako je:

$$\Omega = -\frac{\rho}{r}\dot{\theta}, \quad (2)$$

i ako se perla kotrlja tako da su translacijska brzina točke D i obodna rotacijska brzina suprotnih orijentacija. Ono što je bitno odmah uočiti da je izraz (2) u početnom trenutku zadovoljen jer je u početnom trenutku $\Omega = \dot{\theta} = 0$ i da perla započinje gibanje u režimu statičkog trenja, samo je pitanje do kada će moći zadržati taj režim. Sa slike 1. se vidi da jedino sila trenja pridonosi momentu sila koji djeluje na perlu pa se zaključuje da je orijentacija sile statičkog trenja uvijek takva da kuglicu zakreće tako da se rotacijska brzina i translacijska brzina u točki D poništavaju. Za statičko trenje vrijedi izraz:

$$F_{str} \leq \mu_s N, \quad (3)$$

gdje je μ_s faktor statičkog trenja, a N reakcija podloge.

2.3.2 Dinamičko trenje

Ako izraz (2) nije zadovoljen, na perlu u točki D djeluje sila dinamičkog trenja. Orijentacija sile dinamičkog trenja uvijek je suprotna od vektora brzine točke D . Za iznos dinamičkog trenja vrijedi Coulombov izraz:

$$F_{dtr} = \mu_d N, \quad (4)$$

gdje je μ_d dinamički faktor trenja. U radu će se u obzir uzimati samo režim statičkog trenja jer režim dinamičkog trenja vodi u kaotično gibanje. Razlog zašto je tome tako leži u činjenici da sila dinamičkog trenja može mijenjati orijentaciju po složenom matematičkom modelu i mogu se događati

³ Ovdje je udaljenost središta perle i obruča odmah skraćeno zapisana kao $R - r \equiv \rho$.

prelasci iz režima statičkog trenja u režim dinamičkog trenja što bi bilo nemoguće modelirati.

2.4 Postavljanje jednadžbi gibanja

Nakon analize o sili trenja, moguće je na temelju dijagrama sila sa slike 2. postaviti jednadžbe gibanja perle po komponentama u smjeru tangente u točki D i okomito. Rezultanta svih sila radikalno prema središtu obruča jednak je centripetalnoj sili $m\rho\dot{\theta}^2$ pa se sa slike 2. može pisati:

$$m\rho\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta - F_i\sin\theta. \quad (5)$$

Inercijalna (centrifugalna) sila F_i uzrokovana je rotacijom obruča, a perla (njezino središte) rotira po kružnici polujmera $\rho\sin\theta$ pa to slijedi:

$$F_i = m\rho\sin\theta\omega^2. \quad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u (5) dobiva se:

$$N = m\rho\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + m\rho(\sin\theta)^2\omega^2. \quad (7)$$

Rezultanta svih sila u smjeru tangente u točki D jednak je $m\rho\ddot{\theta}$ pa sa slike 2. vrijedi:

$$m\rho\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 \pm F_{tr}. \quad (8)$$

Razlog zašto se u (8) pojavljuje član $\pm F_{tr}$ jeste zadržavanje općenitosti. Time se zadržava i mogućnost obje orijentacije sile trenja i mogućnost da sila trenja bude statička i dinamička. Rotacijska jednadžba gibanja perle ima oblik:

$$F_{tr}r = I\alpha, \quad (9)$$

gdje je I moment inercije perle, a α kutna akceleracija. Ako je perla puna kugla, onda je $I = \frac{2}{5}mr^2$, a ako je šuplja kugla onda je moment inercije $I = \frac{2}{3}mr^2$. Kraće, jednadžbe (7), (8) i (9) tvore sustav jednadžbi:

$$\left. \begin{aligned} N &= m\rho\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + m\rho(\sin\theta)^2\omega^2 \\ m\rho\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta + m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 \pm F_{tr} \\ F_{tr}r &= I\alpha \end{aligned} \right\}.$$

2.5 Rješenja jednadžbi gibanja

Kao što je ranije rečeno, problem će biti riješen u režimu statičkog trenja. Već je utvrđeno da u režimu statičkog trenja mora vrijediti izraz (2), a deriviranjem izraza (2) po vremenu dobiva se:

$$\alpha = -\frac{\rho}{r}\ddot{\theta}. \quad (10)$$

To je poznati uvjet za kotrljanje bez klizanja. Kako jedino moment trenja uzrokuje rotaciju, a kutna akceleracija mora biti takva da stvara obodnu rotacijsku brzinu koja je u točki D suprotna od translacijske brzine točke D , to slijedi da statičko trenje ima suprotnu orijentaciju od rezultantne sile $m\rho\ddot{\theta}$, ali ta je suprotna orijentacija već uzeta u obzir u izrazu (10) pa je jasno da u slučaju statičkog trenja u jednadžbi (8) sila trenja ima pozitivan predznak. Sada vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} N &= m\rho\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + m\rho(\sin\theta)^2\omega^2 \\ m\rho\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta + m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 + F_{tr} \\ F_{tr}r &= I\alpha \\ \alpha &= -\frac{\rho}{r}\ddot{\theta} \end{aligned} \right\}.$$

Prethodni sustav jednadžbi rješava se supstitucijom α iz 4. u 3. jednadžbu i zatim supstitucijom F_{tr} iz 3. u 2. jednadžbu čime se dobiva:

$$m\rho\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 - \frac{I\rho}{r^2}\ddot{\theta}. \quad (11)$$

Već je rečeno kako je moment inercije perle $I = Kmr^2$ gdje je $K = \frac{2}{5}$ za punu kuglu i $K = \frac{2}{3}$ za šuplju kuglu pa uvođenjem toga u (11) i kraćenjem mase perle slijedi:

$$\begin{aligned} \rho\ddot{\theta} &= -g\sin\theta + \rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 - K\rho\dot{\theta} \\ \Leftrightarrow \rho\ddot{\theta}(1 + K) &= \rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 - g\sin\theta \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{K+1} \left(\sin\theta \cos\theta \omega^2 - \frac{g}{\rho} \sin\theta \right). \quad (12)$$

U dodatku 2 pokazano je da vrijedi sljedeće:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{K+1} \left(\omega^2 (\sin\theta)^2 + \frac{2g}{\rho} \cos\theta \right) + C_1}. \quad (13)$$

Uvedimo odmah parametre $q = \frac{\rho\omega^2}{g}$ i $p = \frac{g}{\rho(K+1)}$ u (13) i (14):

$$\ddot{\theta} = p(q \sin\theta \cos\theta - \sin\theta) \quad (14)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{p(q(\sin\theta)^2 + 2\cos\theta) + C_1}, \quad (15)$$

pri čemu je:

$$C_1 = -p(q(\sin\theta_0)^2 + 2\cos\theta_0). \quad (16)$$

U izrazu (16) koristi se oznaka θ_0 za početni kut otklona perle iz ravnotežnog položaja. Prije nego što se pristupi dalnjem rješavanju problema, valja komentirati izraz (15). Naime, matematički je nemoguće regulirati predznak kutne brzine perle pa će biti potrebno integraciju provoditi parcijalno po intervalima na kojima kutna brzina ima isti predznak. Jednadžba (15) može se pisati u obliku integrala:

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{p(q(\sin\theta)^2 + 2\cos\theta) + C_1}} = \int_0^t dt, \quad (17)$$

ali se mora paziti da se lijeva integracija provodi na intervalu u kojem perla ima isti predznak kutne brzine što ne stvara problem jer je gibanje perle periodično. Daljnje rješenje problema grana se u dva različita smjera – aproksimativni i egzaktni. Kod aproksimativnog rješenja bit će u svrhu linearizacije u diferencijalnu jednadžbu (14) uvedena aproksimacija malih kutova, a egzaktno rješenje bit će provedeno svođenjem integrala na lijevoj strani izraza (17) na nepotpuni eliptički integral prve vrste nakon čega će uslijediti razvoj u beskonačan red Legendreovih polinoma.

2.5.1 Ravnotežni položaji

Već se iz izraza (14) i (15) dalo naslutiti da je gibanje perle periodično što znači da valja pronaći ravnotežne položaje gibanja perle. To su točke u kojima je akceleracija perle jednaka 0 pa vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 &= p \sin\theta_R (q \cos\theta - 1) \\ \Leftrightarrow 0 &= \sin\theta_R (q \cos\theta_R - 1). \end{aligned}$$

Rješenja prethodne jednadžbe jesu $\theta_R = 0$ i $\cos\theta_R = \frac{1}{q}$. Rješenje $\cos\theta_R = \frac{1}{q}$ ne dolazi u obzir za $q < 1$ jer je funkcija kosinus uvijek manja ili jednaka 1. Stoga će se u razmatranju razlikovati sljedeća dva slučaja:

- $q \leq 1$ i ravnotežni položaj je $\theta_R = 0$,
- $q > 1$ i ravnotežni položaji su $\theta_R = 0$ i $\theta_R = \arccos\left(\frac{1}{q}\right)$.

U drugom slučaju vidi se da postoje tri ravnotežna položaja, no valja provjeriti njihovu stabilnost. Poznato je da je točka stabilna (u stabilnoj ravnoteži) ako je potencijalna energija minimalna i da je u labilnoj ravnoteži ako je potencijalna energija maksimalna. Potencijalna energija svake točke obruča sastoji se od gravitacijske potencijalne energije i potencijalne energije zbog centrifugalne sile. Za drugi oblik potencijalne energije potrebno je izvesti izraz. Neka je u točki 0 (točke se opisuju kutom) referentna razina i potencijalna je energija 0. Rad koji treba uložiti da se savlada centrifugalna sila, a da se točka pomakne na neki kut θ jednak je potencijalnoj energiji centrifugalne sile i iz definicije rada kao krivuljnog integrala skalarnog produkta sile i puta jednak je:

$$E_{cfp} = \int_0^\theta m\rho \sin\theta \cos\theta \omega^2 \rho d\theta = \frac{1}{2} m\rho^2 \omega^2 \int_0^\theta \sin(2\theta) d\theta.$$

Prethodni je integral trivijalno rješiv supstitucijom $u = 2\theta$ čime se dobiva:

$$E_{cfp} = \frac{1}{4}m\rho^2\omega^2(\cos(2\theta) - 1) = -\frac{1}{2}m\rho^2\omega^2(\sin\theta)^2.$$

Sada je moguće zapisati ukupnu potencijalnu energiju perle u ovisnosti o položaju perle:

$$E_p = E_{gp} + E_{cfp} = mg\rho(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2(\sin\theta)^2.$$

Ekstremi potencijalne energije perle nalaze se deriviranjem prethodnog izraza i izjednačavanjem derivacije s nulom:

$$\frac{dE_p}{d\theta} = m\rho(g\sin\theta - \rho\omega^2\sin\theta\cos\theta) = m\sin\theta(g - \rho\omega^2\cos\theta) = 0.$$

Rješenja prethodne jednadžbe jesu ravnotežni položaji, no valja pronaći i drugu derivaciju kako bi se vidjelo gdje je energija maksimalna, a gdje minimalna. Druga derivacija jednaka je:

$$\ddot{E}_p = m\rho(g\cos\theta - \rho\omega^2\cos(2\theta)).$$

Vidi se da je:

$$\ddot{E}_p(0) = m\rho(g - \rho\omega^2).$$

Za $q > 1$ kada i postoji više ravnotežnih položaja vrijedi $g < \rho\omega^2$ pa je po prethodnom izrazu u točki $\theta_R = 0$ ekstrem potencijalne energije, a kako je druga derivacija u toj točki manja od 0, to slijedi da je u tom položaju perla ima maksimalnu potencijalnu energiju te je zato to položaj labilne ravnoteže, dok su preostala dva ravnotežna položaji stabilne ravnoteže.

2.5.2 Kvalitativna analiza oblika gibanja perle

Uvrštavanjem (16) u (15) dobiva se izraz za brzinu perle u ovisnosti o kutu otklona:

$$\dot{\theta} = \sqrt{p(q(\sin\theta)^2 + 2\cos\theta) - p(q(\sin\theta_0)^2 + 2\cos\theta_0)}.$$

Taj se izraz može sljedećim nizom transformacija svesti na posebno pogodan izraz za provođenje kvalitativne analize:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \sqrt{p[q(\sin\theta)^2 + 2\cos\theta - (q(\sin\theta_0)^2 + 2\cos\theta_0)]} \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{p[q((\sin\theta)^2 - (\sin\theta_0)^2) + 2(\cos\theta - \cos\theta_0)]} \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{p[-q((\cos\theta)^2 - (\cos\theta_0)^2) + 2(\cos\theta - \cos\theta_0)]} \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{p[-q(\cos\theta - \cos\theta_0)(\cos\theta + \cos\theta_0) + 2(\cos\theta - \cos\theta_0)]} \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{p(\cos\theta - \cos\theta_0)[2 - q(\cos\theta + \cos\theta_0)]}. \end{aligned} \quad (18)$$

Izraz (18) pogodan je za kvalitativnu analizu gibanja perle jer omogućuje određivanje različitih oblika gibanja perle. Kako brzina perle ne smije ući u kompleksno područje vrijednosti, potrebno je zahtijevati:

$$(\cos\theta - \cos\theta_0)[2 - q(\cos\theta + \cos\theta_0)] \geq 0.$$

Rješenja prethodne nejednadžbe su sljedeći sustavi nejednadžbi koje valja riješiti:

$$\begin{aligned} \cos\theta &\geq \cos\theta_0 \\ \frac{2}{q} &\geq \cos\theta + \cos\theta_0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \cos\theta &\leq \cos\theta_0 \\ \frac{2}{q} &\leq \cos\theta + \cos\theta_0 \end{aligned} \right\}$$

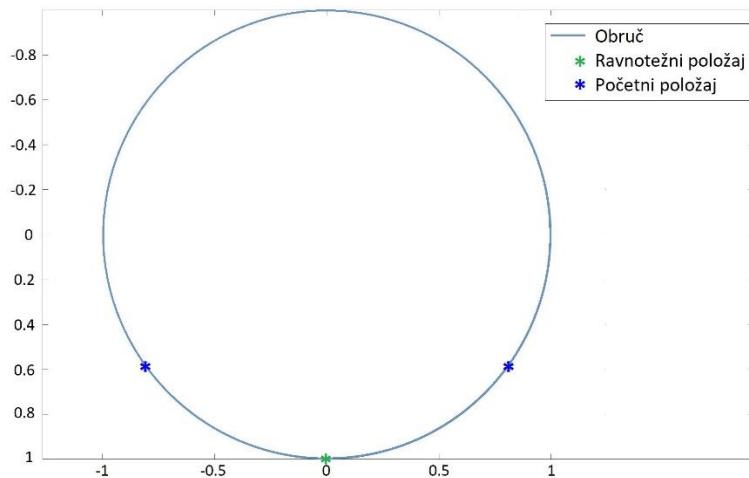
Rješenje tih dvaju sustava redom glase:

- $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ i $\frac{2}{q} - \cos\theta_0 \geq \cos\theta$,
- $\theta \in [-\pi, -\theta_0] \cup [\theta_0, \pi]$ i $\frac{2}{q} - \cos\theta_0 \leq \cos\theta$.

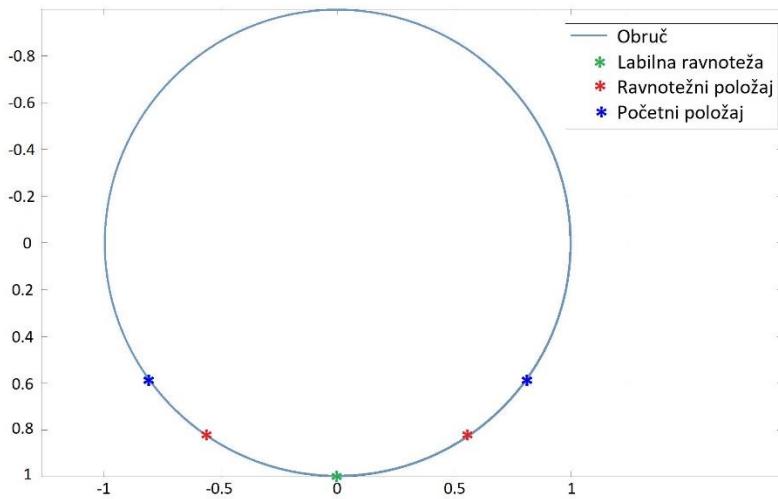
Kako kut $\theta = 0$ sigurno nije obuhvaćen drugim rješenjem, a maksimum kosinus funkcije jednak je 1 i to upravo u točki $\theta = 0$, da bi se perla mogla gibati u okviru drugog rješenja nužno mora biti:

$$\frac{2}{q} - \cos\theta_0 < 1 \Rightarrow q > \frac{2}{1+\cos\theta_0}. \quad (19)$$

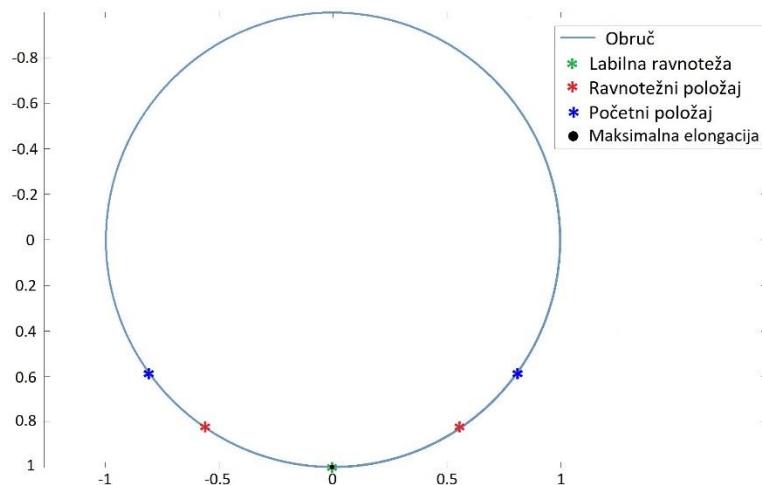
Iz izraza (19) vidi se da je $q = \frac{2}{1+\cos\theta_0}$ granična vrijednost parametra q pa valja nacrtati karakteristične točke koje se pojavljuju u rješenjima nejednadžbe na obruču (kružnici) za nekoliko slučajeva u ovisnosti o parametru q . Pri tome se mora paziti na to da su granične vrijednosti parametra q jednake 1 i $\frac{2}{1+\cos\theta_0}$ pa treba odabratи jedan q između svake od tih granica, a granice treba ispitati zasebno. Točke $\pm\theta_0$, $\pm|\arccos(\frac{2}{q} - \cos\theta_0)|$ (ovaj kut bit će obilježavan s γ pa vrijedi $\cos\gamma = \frac{2}{q} - \cos\theta_0$, a za taj kut koristit će se termin maksimalna elongacija iako to neće uvijek biti tako), $\pm\frac{1}{q}$ i 0 prikazane su na slikama 3., 4., 5. i 6. u ovisnosti o različitim vrijednostima parametra q za početni kut otklona $\theta_0 = 0.3\pi \text{ rad}$.



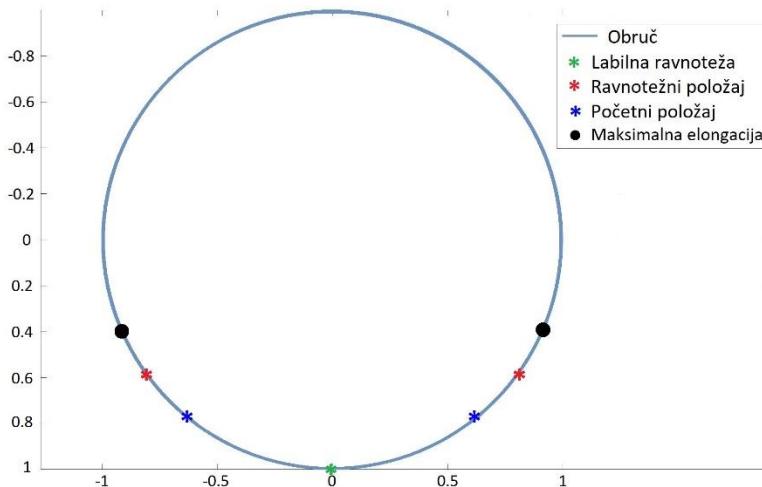
Slika 3. Karakteristične točke gibanja perle za $0 < q \leq 1$ (uzeto je $q = 0.5$)



Slika 4. Karakteristične točke gibanja perle za $1 < q < \frac{2}{1+\cos\theta_0}$ (uzeto je $q = 1.2$)



Slika 5. Karakteristične točke gibanja perle za $q = \frac{2}{1+\cos\theta_0}$



Slika 6. Karakteristične točke gibanja perle za $q > \frac{1}{\cos\theta_0} > \frac{2}{1+\cos\theta_0}$ (uzeto je $q = 2$)

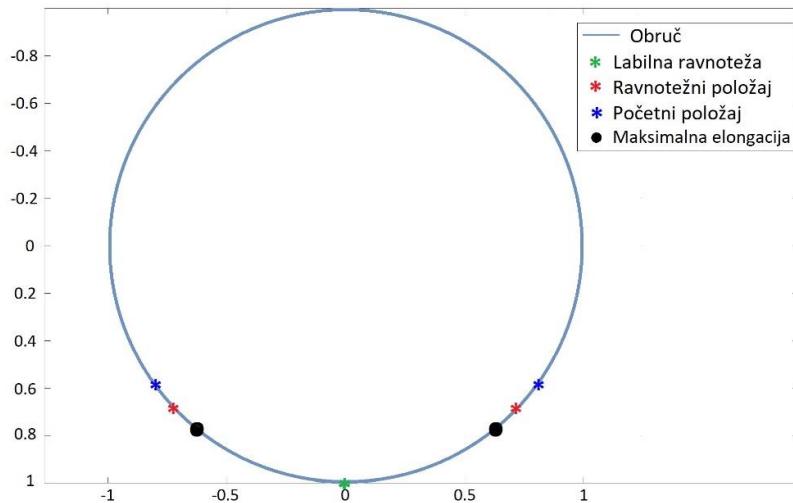
Nakon razmatranja ovih slučajeva iz slike 6. nameće se pitanje je li moguće da točka maksimalne elongacije (crna točka) stoji ispred ravnotežnog položaja (crvena točka) i ako da, kada se to ostvaruje? Jasno je da u tom slučaju mora vrijediti $\cos\gamma \geq \cos\theta_0$ jer je $\gamma \leq \theta_0$ pa se uvrštavanjem toga u prvo od dvaju rješenja početne nejednadžbe dobiva:

$$\frac{2}{q} - \cos\theta_0 \geq \cos\gamma \geq \cos\theta_0 \Rightarrow q \leq \frac{1}{\cos\theta_0}. \quad (20)$$

Stoga preostaje napraviti istu sliku za neki $q < \frac{1}{\cos\theta_0}$, a za $q = \frac{1}{\cos\theta_0}$ jasno je da će se podudariti ravnotežni položaj, maksimalna elongacija γ (koja u ovim slučajevima nije bila maksimalna, ali naziv je zadržan) i početni kut otklona θ_0 jer iz same definicije kuta γ i izraza za ravnotežni položaj slijedi:

$$\cos\gamma = \frac{2}{q} - \cos\theta_0 \Leftrightarrow \cos\theta_R = \frac{\cos\theta_0 + \cos\gamma}{2}.$$

Prethodni izraz mnogo govori o kvalitativnom položaju triju točaka koje su njime povezane. Naime, zaključuje se da je ravnotežni položaj uvjek između početnog kuta otklona i maksimalne elongacije osim u promatranom graničnom slučaju $q = \frac{1}{\cos\theta_0}$ kada se podudaraju. Na slici 7. prikazan je jedini preostali slučaj kada je $\frac{1}{\cos\theta_0} < q > \frac{2}{1+\cos\theta_0}$.



Slika 7. Karakteristične točke gibanja perle za $\frac{1}{\cos\theta_0} > q > \frac{2}{1+\cos\theta_0}$ (uzeto je $q = 1.5$)

Svaki od tih sedam slučajeva sada je potrebno detaljno kvalitativno opisati pa će za to postojati posebni odjeljci, no prije toga valja razmotriti još kratko izraz (14) kako bi se odredila orientacija akceleracije. Prema izrazu (14) vrijedi:

$$\ddot{\theta} = p \sin\theta (q \cos\theta - 1). \quad (21)$$

Iz tog se izraza vidi da se orientacija akceleracije mijenja prolaskom kroz ravnotežni položaj. To je vrlo bitan zaključak koji će se koristiti u daljnjoj analizi pojedinih obrazaca gibanja perle.

Slučaj sa slike 3. najjednostavniji je jer postoji samo jedan ravnotežni položaj i samo dvije točke u kojima je brzina 0 pa je jasno da će za $q \leq 1$ perla titrati oko ravnotežnog položaja $\theta_R = 0$ i to na intervalu $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ između kutova θ_0 i $-\theta_0$.

Slučaj sa slike 4. već je nešto komplikiraniji jer iako ponovno postoje samo dvije točke u kojima je brzina 0 (to su θ_0 i $-\theta_0$), postoje tri ravnotežna položaja, a prolaskom kroz ravnotežni položaj mijenja se orientacija akceleracije. Zato je ovdje potrebna mnogo detaljnija analiza. Kako je u ovom slučaju $1 < q < \frac{2}{1+\cos\theta_0}$, po nejednakosti (19) gibanje u intervalu $\theta \in [-\pi, -\theta_0] \cup [\theta_0, \pi]$ nije moguće pa se perla sigurno može gibati jedino u intervalu $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$. Zato kad perla kreće iz početnog položaja, kreće se gibati prema crvenom ravnotežnom položaju. Kad dođe u crveni ravnotežni položaj, brzina je usmjerena prema zelenom ravnotežnom položaju, a akceleracija nakon prolaska kroz crveni ravnotežni položaj mijenja orientaciju i usmjerena je prema početnom položaju, no kako brzina postiže nulu samo u točkama θ_0 i $-\theta_0$, gibanje perle će se i dalje izvoditi u intervalu $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ između kutova θ_0 i $-\theta_0$.

Slučaj sa slike 5. granični je slučaj i tu se događa zanimljiva situacija. U tom slučaju je $\cos\gamma = 1$, odnosno $\gamma = 0$. To znači da su u točki 0 (najniža točka) i brzina i akceleracija perle jednake 0 što znači da bi perla trebala mirovati u toj točki kada dođe do te točke. No, iz odjeljka 2.5.1. se zna da je to položaj labilne ravnoteže pa će i najmanji impuls sile kuglicu izbaciti iz tog položaja i kuglica će nastaviti gibanje. Teorijski model to ne uzima u obzir jer su to nepredvidivi impulsi, odnosno ne zna se kolika će biti početna brzina nakon djelovanja takvog impulsa. Zato je prema teoriji ovaj slučaj mirovanje u položaju 0 bez obzira na početni kut otklona.

Po rastućim vrijednostima parametra q slijedi slučaj sa slike 7. pa će prvo taj slučaj biti razmotren, a tek onda slučaj sa slike 6. Tada postoje četiri točke u kojima je brzina perle jednaka 0 i 3 ravnotežna položaja. Prvo valja odrediti orientaciju akceleracije u početnom trenutku. Kako je u tom slučaju $\frac{1}{\cos\theta_0} > q > \frac{2}{1+\cos\theta_0}$, član $(q \cos\theta_0 - 1)$ uvijek je negativan pa akceleracija prema izrazu (21) ima suprotan predznak od $\sin\theta_0$ što znači da je orijentirana prema labilnom ravnotežnom položaju

(zelenoj točki). Kad prolazi kroz crveni ravnotežni položaj, mijenja se orijentacija akceleracije, no orijentacija brzine ostaje ista pa kad perla dođe do točke maksimalne elongacije (bijela točka), brzina je 0 a akceleracija je usmjerena prema početnom otklonu. Zato se u tom slučaju gibanje perle odvija između točaka θ_0 i $\arccos\left(\frac{2}{q} - \cos\theta_0\right)$ ili $-\theta_0$ i $-\arccos\left(\frac{2}{q} - \cos\theta_0\right)$.

Preostaje još slučaj sa slike 6. Tada je $q > \frac{1}{\cos\theta_0} > \frac{2}{1+\cos\theta_0}$. Član $(q\cos\theta_0 - 1)$ uvijek je pozitivan pa prema izrazu (21) početna akceleracija uvijek ima isti predznak kao i $\sin\theta_0$ što znači da je orijentirana suprotno od položaja labilne ravnoteže, odnosno po slici 6. se vidi da se tada perla giba prema crvenoj točki (ravnotežni položaj) i crnoj točki (maksimalna elongacija). Prolaskom kroz crveni ravnotežni položaj akceleracija mijenja orijentaciju i usmjerena je prema početnom kutu otklona, a brzina i dalje ima orijentaciju prema crnoj točki. Po dolasku u crnu točku brzina je 0, a akceleracija je usmjerena prema početnom kutu otklona što znači da se perla giba između točaka θ_0 i $\arccos\left(\frac{2}{q} - \cos\theta_0\right)$ ili $-\theta_0$ i $-\arccos\left(\frac{2}{q} - \cos\theta_0\right)$ oko ravnotežnog položaja crvene točke $\theta_R = \arccos\left(\frac{1}{q}\right)$. No, takvo gibanje ne postoji za svaki $q > \frac{2}{1+\cos\theta_0}$ jer za svaki početni kut otklona postoji točka na obruču na kojoj se kuglica odvaja od obruča. U tom je graničnom slučaju reakcija podloge jednaka nuli pa se iz (7) i (15) može naći taj granični kut, a zatim i granični q , no to ovdje nema potrebe raditi jer ta gibanja nisu u domeni analize problema niti su u domeni vrijednosti parametra q koje se postižu u praksi.

Ova analiza može se svesti na sljedeća tri slučaja:

- perla se giba u intervalu $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ između kutova θ_0 i $-\theta_0$ za $q < \frac{2}{1+\cos\theta_0}$,
- perla za bilo koji početni kut otklona nakon prvog dolaska u položaj labilne ravnoteže $\theta_R = 0$ ostaje mirovati u tom položaju za $q = \frac{2}{1+\cos\theta_0}$,
- perla se giba na intervalu između θ_0 i $|\arccos\left(\frac{2}{q} - \cos\theta_0\right)|$ ako je $\theta_0 > 0$ i na intervalu θ_0 i $-|\arccos\left(\frac{2}{q} - \cos\theta_0\right)|$ ako je $\theta_0 < 0$ za $q > \frac{2}{1+\cos\theta_0}$.

2.5.3 Aproksimacija malih kutova

Kao što je spomenuto, da bi se diferencijalna jednadžba (14) svela na homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda potrebno je uvesti aproksimacije malih kutova. Aproksimaciju malih kutova ima smisla uvesti samo za kut mjerjen od ravnotežnog položaja pa je prvo potrebno u jednadžbu (14) uvesti novu varijablu δ za koju vrijedi:

$$\theta = \theta_R + \delta.$$

Fizikalno, varijabla δ je otklon perle od ravnotežnog položaja. Uvrštavanjem toga u (14) dobiva se:

$$\ddot{\delta} = p\sin(\theta_R + \delta)(q\cos(\theta_R + \delta) - 1). \quad (22)$$

Razvijanjem funkcija sinus i kosinus po adpcionim teoremitima (22) poprima oblik:

$$\ddot{\delta} = p[\sin\theta_R\cos\delta + \sin\delta\cos\theta_R](q\cos\theta_R\cos\delta - q\sin\theta_R\sin\delta - 1). \quad (23)$$

U (23) sada valja uvesti aproksimacije malih kutova za varijablu δ . Poznat je limes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

pa iz tog limesa slijedi da je za male vrijednosti x dobra aproksimacija $\sin x \approx x$. Vrijedi i limes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$$

pa je iz toga za male vrijednosti x dobra aproksimacija $\cos x \approx 1$. Aproksimacija malih kutova

zahtijeva $\delta \rightarrow 0$ pa uvođenjem navedenog u (23) slijedi:

$$\ddot{\delta} = p[\sin\theta_R + \delta\cos\theta_R](q\cos\theta_R - q\delta\sin\theta_R - 1). \quad (24)$$

Sada se jednadžba (24) mora rješavati po svim slučajevima zasebno. Neka je prvo $q < 1$. Tada je $\theta_R = 0$ pa uvrštavanjem toga u (24) slijedi:

$$\ddot{\delta} = p\delta(q - 1) \Leftrightarrow \ddot{\delta} + p\delta(1 - q) = 0. \quad (25)$$

Diferencijalna jednadžba (25) je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda čije se rješenje može iznaći rješavanjem karakteristične kvadratne jednadžbe. Opće je rješenje oblika [7]:

$$\delta(t) = c_1 \sin(\sqrt{p(1-q)}t) + c_2 \cos(\sqrt{p(1-q)}t).$$

Konstante c_1 i c_2 određuju se iz početnih uvjeta koji su u ovom slučaju $\delta(0) = \delta_0$ i $\dot{\delta}(0) = 0$ gdje je δ_0 početni kut otklona perle od ravnotežnog položaja. Uvrštavanjem tih uvjeta u (25) dobiva se konačno rješenje gibanja perle:

$$\delta(t) = \delta_0 \cos(\sqrt{p(1-q)}t). \quad (26)$$

Iz izraza (26) moguće je iznaći period titranja perle oko ravnotežnog položaja. U trenutku $t = 0$ perla je otklonjena za kut δ_0 od ravnotežnog položaja. Ponovno će biti otklonjena od ravnotežnog položaja za δ_0 nakon perioda T_A koji zadovoljava jednadžbu:

$$\cos(\sqrt{p(1-q)}T_A) = 1.$$

Najmanji takav period je $T_A = \frac{2\pi}{\sqrt{p(1-q)}}$ pa je to period titranja perle. Valja naglasiti kako je to period malih oscilacija jer je dobiven aproksimacijom malih kutova.

Promotrimo sada slučaj $q > 1$. Tada više neće biti titranje oko ravnotežnog položaja $\theta_R = 0$ već oko ravnotežnih položaja koji su rješenja jednadžbe $\cos\theta_R = \frac{1}{q}$. Tada je $\sin\theta_R = \frac{1}{q}\sqrt{q^2 - 1}$. Uvrštavanjem toga u (21) dobiva se:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} &= p \left[\frac{1}{q}\sqrt{q^2 - 1} + \delta \frac{1}{q} \right] \left(1 - q\delta \frac{1}{q}\sqrt{q^2 - 1} - 1 \right) \\ &\Leftrightarrow \ddot{\delta} = -\delta \frac{1}{q}\sqrt{q^2 - 1}p \left[\sqrt{q^2 - 1} + \delta \right] \\ &\Leftrightarrow \ddot{\delta} = -\delta \frac{q^2 - 1}{q}p - \delta^2 \frac{1}{q}\sqrt{q^2 - 1}p. \end{aligned}$$

Kako se uzima aproksimacija $\delta \rightarrow 0$, član δ^2 je zanemariv u odnosu na član δ pa prethodna jednadžba poprima oblik:

$$\ddot{\delta} + \delta \frac{q^2 - 1}{q}p = 0. \quad (27)$$

Budući da se ova jednadžba rješava uz iste početne uvjete kao i jednadžba (25), a ima istu strukturu kao i jednadžba (25), rješenje jednadžba (27) bit će analogno rješenju jednadžbe (25):

$$\delta(t) = \delta_0 \cos\left(\sqrt{p \frac{q^2 - 1}{q}}t\right). \quad (28)$$

Period titranja također se određuje analogno i dobiva se $T_A = \frac{2\pi\sqrt{q}}{\sqrt{p(q^2 - 1)}}$. To je opet period malih oscilacija perle za $q > 1$.

Preostaje još razmotriti slučaj $q = 1$. Tada je ponovno $\theta_R = 0$ pa se uvrštavanjem u (25) dobiva rješenje $\ddot{\delta} = 0$ koje uz početne uvjete $\delta(0) = \delta_0$ i $\dot{\delta}(0) = 0$ prelazi u oblik $\delta(t) = \delta_0$. To znači da perla čitavo vrijeme miruje u početnom položaju. Taj je rezultat u konzistenciji sa sljedećim izrazom:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{2\pi}{\sqrt{p(1-q)}} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{2\pi\sqrt{q}}{\sqrt{p(q^2-1)}} = \infty.$$

Zaista, ako period malih oscilacija perle za $q = 1$ teži u beskonačnost, to upućuje na mirovanje perle. Ova rješenja za titranje perle malim amplitudama mogu se zapisati na sljedeći način:

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_0 \cos(\sqrt{p(1-q)}t), & q < 1 \\ \delta_0 \cos\left(\sqrt{p}\frac{q^2-1}{q}t\right), & q > 1 \\ \delta_0, & q = 1 \end{cases}$$

$$T_A = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{p(1-q)}}, & q \leq 1 \\ \frac{2\pi\sqrt{q}}{\sqrt{p(q^2-1)}}, & q \geq 1 \end{cases}.$$

Uvrštavanjem $\delta(t) = \theta(t) - \theta_R$ i $\delta_0 = \theta_0 - \theta_R$ dobiva se rješenje za titranje malim amplitudama:

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_0 \cos(\sqrt{p(1-q)}t), & q < 1 \\ \arccos\left(\frac{1}{q}\right) + \left(\theta_0 - \arccos\left(\frac{1}{q}\right)\right) \cos\left(\sqrt{p}\frac{q^2-1}{q}t\right), & q > 1 \end{cases}$$

2.5.4 Svođenje na eliptički integral

Za razliku od prethodnog rješenja, ovo je rješenje egzaktno i polazi od izraza (17). Integral na desnoj strani izraza (17) trivijalan je, dok integral na lijevoj strani izraza (17) nema rješenja u elementarnim funkcijama. U takvima je situacijama korisno integral svesti na neku posebnu vrstu integrala, a integral koji u nazivniku ima korijen i pod korijenom trigonometrijske članove je eliptički integral. Zato treba integral:

$$I = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{p(q(\sin\theta)^2 + 2\cos\theta) + C_1}}, \quad (29)$$

svesti na eliptički integral. U integralima koji sadrže trigonometrijske članove obično je korisno uvesti Weierstrassovu supstituciju $u = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ [6] pa vrijedi pokušati s time u integralu (29). Tada je:

$$u = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right), d\theta = \frac{2du}{1+u^2}, \sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}, \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Uvrštavanjem toga u (29) dobiva se:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \frac{du}{\sqrt{(1+u^2) \sqrt{p\left(q\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 + 2\frac{1-u^2}{1+u^2}\right) + C_1}}} \\ \Leftrightarrow I &= 2 \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \frac{du}{\sqrt{p(4qu^2 + 2(1-u^2)(1+u^2)) + C_1}} \\ \Leftrightarrow I &= 2 \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \frac{du}{\sqrt{p(4qu^2 + 2 - 2u^4) + C_1}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Ako je $a = -2p$, $b = 4pq$ i $c = 2p + C_1$, onda se integral (30) može pisati u obliku:

$$I = 2 \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \frac{du}{\sqrt{au^4 + bu^2 + c}}. \quad (31)$$

Pod korijenom u (31) nalazi se bikvadratni trinom koji se lako da faktorizirati na način:

$$au^4 + bu^2 + c = a(u^2 - t_1)(u^2 - t_2),$$

gdje je $t_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ i $t_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Uvrštavanjem toga u (31) dobiva se:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{tg(\frac{\theta_0}{2})}^{tg(\frac{\theta(t)}{2})} \frac{du}{\sqrt{(u^2-t_1)(u^2-t_2)}} \\ \Leftrightarrow I &= \frac{2}{\sqrt{at_1t_2}} \int_{tg(\frac{\theta_0}{2})}^{tg(\frac{\theta(t)}{2})} \frac{du}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{u}{\sqrt{t_1}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{u}{\sqrt{t_2}}\right)^2\right]}}. \end{aligned} \quad (32)$$

U (32) valja uvesti supstituciju $\frac{u}{\sqrt{t_2}} = v$, $du = \sqrt{t_2}dv$ kako bi se dobio eliptički integral prve vrste u Legendreovoj formi:

$$I = \frac{2}{\sqrt{at_1}} \int_{\frac{tg(\frac{\theta_0}{2})}{\sqrt{t_2}}}^{\frac{tg(\frac{\theta(t)}{2})}{\sqrt{t_2}}} \frac{dv}{\sqrt{\left[1-\frac{t_2}{t_1}v^2\right][1-v^2]}}. \quad (33)$$

Uvrštavanjem integrala (33) u (17), dobiva se:

$$\int_0^t dt = \frac{2}{\sqrt{at_1}} \int_{\frac{tg(\frac{\theta_0}{2})}{\sqrt{t_2}}}^{\frac{tg(\frac{\theta(t)}{2})}{\sqrt{t_2}}} \frac{dv}{\sqrt{\left[1-\frac{t_2}{t_1}v^2\right][1-v^2]}}. \quad (34)$$

Sada se iz (34) može odrediti period titranja perle oko ravnotežnog položaja. Pri tome valja uvažiti kvalitativnu analizu iz 2.5.2. koja opisuje kakvo je gibanje perle i oko kojeg ravnotežnog položaja. Za slučaj $q < \frac{2}{1+\cos\theta_0}$ perla titra oko ravnotežnog položaja $\theta_R = 0$ na simetričnom intervalu $[-\theta_0, \theta_0]$. Kako je podintegralna funkcija u (34) parna (simetrična s obzirom na os ordinata), a interval na kojemu se vrši integracija da bi se dobila polovina perioda je centralno simetričan s obzirom na ishodište, to slijedi da je period titranja perle u tom slučaju jednak četverostrukom vremenu da perla dođe iz početnog položaja do položaja labilne ravnoteže $\theta_R = 0$. Za $q > \frac{2}{1+\cos\theta_0}$ titranje perle nije simetrično s obzirom na ravnotežni položaj pa je period titranja perle jednak dvostrukom vremenu da perla dođe iz položaja početnog otklona u točku maksimalne elongacije. Uvažavanjem toga dobiva se period titranja perle prema (34):

$$T = \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{at_1}} \int_0^{\frac{tg(\frac{\theta_0}{2})}{\sqrt{t_2}}} \frac{dv}{\sqrt{\left[1-\frac{t_2}{t_1}v^2\right][1-v^2]}}, & q < \frac{2}{1+\cos\theta_0} \\ \frac{4}{\sqrt{at_1}} \left| \int_{\frac{tg(\frac{\theta_0}{2})}{\sqrt{t_2}}}^{\frac{tg(\frac{\gamma}{2})}{\sqrt{t_2}}} \frac{dv}{\sqrt{\left[1-\frac{t_2}{t_1}v^2\right][1-v^2]}} \right|, & q > \frac{2}{1+\cos\theta_0} \end{cases}. \quad (35)$$

Kako bi se integrali iz (35) prebacili iz Legendreove forme u normalnu trigonometrijsku formu uvodi se supstitucija $v = \sin\varphi$ čime se dobiva:

$$T = \begin{cases} \frac{8}{\sqrt{at_1}} \int_0^{\arcsin\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}{\sqrt{t_2}}\right]} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{t_2}{t_1}(\sin\varphi)^2}}, & q < \frac{2}{1+\cos\theta_0} \\ \frac{4}{\sqrt{at_1}} \left| \int_{\arcsin\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}{\sqrt{t_2}}\right]}^{\arcsin\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{t_2}}\right]} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{t_2}{t_1}(\sin\varphi)^2}} \right|, & q > \frac{2}{1+\cos\theta_0} \end{cases}.$$

S obzirom na to da su od praktične važnosti za provedbu eksperimenta bitni jedino slučajevi kad je brzina okretanja obruča mala jer je za ostale zahtjevno izvesti mjerena, razvijanjem eliptičkog integrala za period titranja perle za slučaj $q < \frac{2}{1+\cos\theta_0}$ u beskonačan red Legendreovih polinoma koji se može naći u dodatku 3 dobiva se:

$$T = \frac{16}{\sqrt{at_1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2n+1} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\arcsin\left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}{\sqrt{t_2}}\right]}{2} \right) \right]^{2n+1} \sum_{i=0}^n \left(1 - 2 \frac{t_2}{t_1} \right)^i \binom{n}{i} \binom{\frac{n+i-1}{2}}{n}, \quad q < \frac{2}{1+\cos\theta_0}. \quad (36)$$

Izraz (36) bit će okosnica za provjeru teorije eksperimentom jer će se u eksperimentu mjeriti period titranja pere za $q < \frac{2}{1+\cos\theta_0}$, a vrijednost perioda će se aproksimirati prema izrazu (36) programom čiji je kod pokazan u dodatku 4. Dalje bi se gibanje perle egzaktno moglo iskazati korištenjem Jacobijevih eliptičkih funkcija [2], no to sada nema smisla raditi jer se iz toga neće dobiti ništa konkretno već će se samo drugačije zapisati ranije dobiveni izraz (34).

2.6 Uvjeti za režim statičkog trenja

Budući da su razmatranja provedena sa statičkim trenjem, preostaje još iznaći uvjete da se perla giba u režimu statičkog trenja. Počinje se od sustava jednadžbi gibanja:

$$\left. \begin{aligned} N &= m\rho\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + m\rho(\sin\theta)^2\omega^2 \\ m\rho\ddot{\theta} &= -mgsin\theta + m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 + F_{tr} \\ F_{tr}r &= I\alpha \\ \alpha &= -\frac{\rho}{r}\ddot{\theta} \end{aligned} \right\},$$

ali sada se akceleracija $\ddot{\theta}$ izrazi preko trenja na način:

$$F_{tr}r = -I\frac{\rho}{r}\ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{F_{tr}r^2}{I\rho} = -\frac{F_{tr}r^2}{Kmr^2\rho} = -\frac{F_{tr}}{Km\rho}. \quad (37)$$

Uvrštavanjem (37) u drugu jednadžbu sustava dobiva se:

$$\begin{aligned} -\frac{F_{tr}}{K} &= -mgsin\theta + m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 + F_{tr} \\ \Leftrightarrow F_{tr} \left(1 + \frac{1}{K} \right) &= mgsin\theta - m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2 \\ \Leftrightarrow F_{tr} &= \frac{K}{K+1} (mgsin\theta - m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2). \end{aligned} \quad (38)$$

Kombiniranjem izraza (3) i izraza (38) dobiva se nejednakost:

$$\frac{K}{K+1} (mgsin\theta - m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2) \leq \mu_s N. \quad (39)$$

Uvrštavanjem N iz prve jednadžbe početnog sustava u (39) dobiva se:

$$\begin{aligned} \frac{K}{K+1} (mgsin\theta - m\rho\sin\theta\cos\theta\omega^2) &\leq \mu_s (mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + m\rho(\sin\theta)^2\omega^2) \\ \Leftrightarrow \frac{K}{K+1} (gsin\theta - \rho\sin\theta\cos\theta\omega^2) &\leq \mu_s (\rho\dot{\theta}^2 + g\cos\theta + \rho(\sin\theta)^2\omega^2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K}{K+1} (\sin\theta - q\sin\theta\cos\theta) \leq \mu_s \left(\frac{\rho}{g} \dot{\theta}^2 + \cos\theta + q(\sin\theta)^2 \right).$$

Kako je $\frac{\rho}{g} \dot{\theta}^2 \geq 0$, dovoljno je zadovoljiti manje strožu nejednakost:

$$\begin{aligned} \frac{K}{K+1} (\sin\theta - q\sin\theta\cos\theta) &\leq \mu_s (\cos\theta + q(\sin\theta)^2) \\ \Leftrightarrow \frac{\sin\theta - q\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + q(\sin\theta)^2} &\leq \frac{K+1}{K} \mu_s. \end{aligned} \quad (40)$$

Neka je $f(\theta) = \frac{\sin\theta - q\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + q(\sin\theta)^2}$. Deriviranjem te funkcije i izjednačavanjem derivacije s 0 dobivaju se ekstremi funkcije $f(\theta)$. $\sin(\beta) = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{u-3}{2}}$, $\cos(\beta) = \frac{u-1}{2q}$ pri čemu je $u = \sqrt{5 + 4q^2}$. Odmah se vidi da kako sinus ne bi prešao u kompleksne vrijednosti, mora biti $q \geq 1$. Također, izračunavanjem druge derivacije funkcije $f(\theta)$ vidi se da je za $q \geq 1$ iznađeni ekstrem lokalni maksimum, no kako bi se zadovoljila nejednakost (40), potrebno je pronaći globalni maksimum na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pa osim pronadene točke maksimum funkcije $f(\theta)$ može biti i na rubovima intervala. Očito je $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{q}$ veći od $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{q}$ pa je maksimum ili u točki x ili u točki $\frac{\pi}{2}$. Do neke granične vrijednosti q_G maksimum funkcije $f(\theta)$ je u točki $\frac{\pi}{2}$, a kasnije je maksimum u točki x . Granična vrijednost parametra q je ona za koju vrijedi:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(u_G-3)^3}{2}} \frac{1}{2(u_G-2)} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{q_G}.$$

Vrijednost q_G i u_G povezani su izrazom $u_G = \sqrt{5 + 4q_G^2}$ pa se grafičkim rješavanjem prethodne jednadžbe po q_G dobiva $q_G \approx 2.51$. Zato po (40) vrijedi:

$$\mu_s \geq \begin{cases} \frac{K}{q(K+1)}, & q < 2.51 \\ \frac{K}{K+1} \frac{\sqrt{(\sqrt{5+4q^2}-3)^3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{5+4q^2}-2)}, & q \geq 2.51 \end{cases}.$$

Prilikom izvođenja eksperimenta neće biti postizane brzine rotacije obruča takve da je $q \geq 2.51$ pa je u obzir potrebno uzeti samo prvi uvjet.

3 Opis eksperimenta i mjerena

U ovom poglavlju bit će detaljno opisan postav eksperimenta (aparatura) te će biti jasno predložen slikama i bit će opisan postupak mjerena, pribor i veličine koje će biti mjerene.

Od pribora je korišten elektromotor koji može mijenjati brzinu vrtnje, čelični obruč promjera 53.3 cm, čelična kuglica polujmra 1 mm, drveni štap za izbacivanje kuglice, mobilni telefon s kamerom, papirnata metarska vrpca duljine 1 m s milimetarskom podjelom i držač za mobitel od kartona.

3.1 Postav eksperimenta

Elektromotor se postavi na stol tako da mu rotirajuća osovina visi sa stola vertikalno prema dolje. Na rotirajuću osovinu učvrsti se čelični obruč. Tako se osiguralo da se čelični obruč može rotirati oko osi u vertikalnoj ravnini. Na rub obruča tekućim se ljepilom zlijepi papirnata metarska vrpca duljine 1 m s milimetarskom podjelom tako da je u najnižoj točki obruča⁴ oznaka na metarskoj vrpci 50 cm. Time se dobiva simetričnost mjerne vrpce s obzirom na položaj labilne ravnoteže. Prije nego što se obruč počne rotirati, kuglica se postavi unutar žlijeba na određenu odabranu visinu i učvrsti se drvenim štapom. Nakon što se obruč rotira na nekoj stalnoj brzini, drveni štap se izbjija i počinje

⁴ U poglavlju 2 ta se točka nazivala položaj labilne ravnoteže, a eksperimentalno ju je moguće odrediti tako da se kuglica pusti da miruje u obruču koji ne rotira. Kuglica će mirovati u najnižoj točki obruča jer je to ravnotežni položaj.

gibanje kuglice iz tog početnog položaja s početnom brzinom 0. Postav eksperimenta na mirujućem obruču prikazan je na slici 8.



Slika 8. Postav eksperimenta

Libela na slici 8. služi za određivanje brzine rotacije obruča o čemu će biti riječi u sljedećem dijelu, a mobilni telefon s kamerom nalazi se u kartonskom držaču koji je učvršćen prvi vrhu obruča.

3.2 Opis mjeranja

Veličine koje u eksperimentu treba mjeriti su:

- kutna brzina rotacije obruča ω ,
- početni položaj kuglice (iz kojeg je moguće odrediti početni kut otklona kuglice),
- vrijeme τ potrebno da kuglica dođe iz početnog položaja u položaj labilne ravnoteže (iz čega se dobiva period titranja kuglice kao $T = 4\tau$).

U prvoj varijanti vrijednost kutne brzine obruča ω držat će se stalnom, a mijenjat će se početni kut otklona kuglice i zato će se mijenjati i mjereno vrijeme τ . U drugoj varijanti početni kut otklona kuglice držat će se stalnim, a mijenjat će se kutna brzina obruča ω . Na kraju će rezultati biti prikazani u dva grafa – graf ovisnosti perioda titranja kuglice o početnom kutu otklona i graf ovisnosti perioda titranja kuglice o kutnoj brzini rotacije obruča ω . Na iste te grafove bit će ucrtno teorijsko očekivanje prema izrazu (36) i teorijsko očekivanje aproksimacije malih kutova pa će se na taj način teorijska

podloga usporediti s eksperimentom.

Kutna brzina rotacije obruča mjerit će se indirektno preko perioda vrtnje obruča T_O . Period obruča mjeri se na način da se prebroji broj okvira između dvaju položaja u kojima je obruč paralelan s libelom na podu pri čemu se mora paziti da se ne gledaju dva uzastopna takva položaja, nego se između dva promatrana položaja obruč točno jednom mora naći u tom položaju. Nakon toga broj okvira podijeli se s brojem okvira u sekundi čime se dobiva period jednog okreta u sekundama. Kada se nađe period rotacije obruča, može se dobiti kutna brzina obruča u radijanima po sekundi prema sljedećem izrazu:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T_O}.$$

Početni položaj kuglice očitava se na mjernej vrpci. Time se dobiva duljina kružnog luka između početnog položaja kuglice i najnižeg položaja s obzirom na koji se kut otklona i mjeri. Nakon tog mjerjenja kut otklona u radijanima računa se po izrazu:

$$\theta = \frac{l}{\rho} \text{ rad},$$

gdje je l duljina kružnog luka (u ovom slučaju najkraća udaljenost najniže točke obruča i početnog položaja kuglice na obruču), a ρ polumjer kružnice (u ovom slučaju udaljenost središta obruča i središta kuglice).

Vrijeme τ također se mjeri brojanjem frameova između trenutka kada je kuglica u početnom položaju i trenutka kada je kuglica prvi put u najnižem položaju. Nakon toga se nakon toga broj okvira ponovno podijeli s brojem okvira u sekundi čime se dobiva period jednog okreta u sekundama.

4 Analiza rezultata i diskusija

U ovom su poglavlju rezultati mjerjenja prikazani tablično i grafički te je uspoređivana teorija s eksperimentom. Prije prikaza podataka, u Tablici 1. slijedi popis konstanti korištenih za računanje s eksperimentalno dobivenim vrijednostima.

Tablica 1. Popis konstantnih veličina

Fizikalno ili matematičko značenje (ako postoji)	Oznaka	Vrijednost
Ubrzanje slobodnog pada	g	9.81 ms^{-2}
Udaljenost središta kuglice i središta obruča	ρ	0.2665 m
Koeficijent uz moment inercije kuglice	K	$\frac{2}{5}$

Parametar p izračuna se iz definicijskog izraza za taj parametar uvrštavanjem konstanti iz tablice 1.:

$$p = \frac{g}{\rho(K+1)} = \frac{9.81 \text{ ms}^{-2}}{0.2665 \text{ m} \left(\frac{2}{5} + 1\right)} \approx 26.2932 \text{ s}^{-2}.$$

Time su određene sve konstantne vilične korištene za račun s eksperimentalno dobivenim podatcima pa su u tablici 2. prikazani podaci mjerena perioda titranja perle zajedno s teorijskim vrijednostima perioda titranja.

Budući da su svi q manji od 1, period malih oscilacija računat je prema izrazu iz odjeljka 2.5.3. $T_A = \frac{2\pi}{\sqrt{p(1-q)}}$. Teorijski period računat je korištenjem programa u dodatku 4 po izrazu (36).

Iz tablice 2. se odmah primjećuje da je period malih oscilacija znatno bliže izmjerrenom periodu nego teorijski period dobiven egzaktnim izrazom (36).

Tablica 2. Teorijski i mjereni periodi titranja kuglice

Početni kut otklona [rad]	q	Teorijski period [s]	Mjereni period [s]	Period malih oscilacija [s]
1,182	0,023	0,779	1,247	1,239
1,137	0,032	0,779	1,320	1,244
1,126	0,052	0,807	1,332	1,258
0,375	0,077	0,775	1,332	1,275
1,126	0,078	0,796	1,368	1,276
1,144	0,081	0,799	1,362	1,278
0,375	0,086	0,777	1,368	1,281
0,919	0,086	0,786	1,332	1,281
0,199	0,087	0,781	1,297	1,282
0,188	0,089	0,782	1,332	1,283
0,795	0,093	0,782	1,357	1,286
0,976	0,100	0,794	1,332	1,291
0,563	0,105	0,781	1,332	1,294
0,657	0,111	0,784	1,368	1,299
0,946	0,111	0,796	1,351	1,299
1,088	0,113	0,806	1,332	1,300
0,844	0,113	0,791	1,400	1,300
0,574	0,119	0,785	1,348	1,305
0,638	0,120	0,786	1,408	1,306
1,133	0,122	0,813	1,320	1,307
1,036	0,122	0,806	1,419	1,307
0,953	0,129	0,802	1,332	1,312
0,750	0,140	0,795	1,332	1,321
0,976	0,181	0,822	1,368	1,353
1,126	0,183	0,836	1,370	1,355
1,148	0,208	0,847	1,423	1,377

Glavni razlog za to je činjenica da je izraz (36) dobiven bez uzimanja otpora gibanju kuglice u obzir, a iako je tako dobiven i period malih oscilacija, na taj period otpor utječe znatno manje jer je i put kuglice na kojemu otpor djeluje znatno manji kod malih kutova pa je i gubitak energije znatno manji. Također, prema uvjetima pronađenima u 2.6. vidi se da kuglica ne mora biti čitavo vrijeme u režimu statičkog trenja jer nije zadovoljena nejednakost koja je dovoljan uvjet za to⁵, a u teorijskom modelu pretpostavljeno je da se kuglica čitavo vrijeme giba u režimu statičkog trenja. No, iako u teorijskim razmatranjima otpor nije uzet u obzir (jer ga je matematički vrlo teško modelirati zbog specifične geometrije žlijeba), razumno je pretpostaviti da postoji sličnost gibanja kuglice s otporom i bez otpora, a teorija sličnosti nalaže da se takve pojave obično mogu dobro preslikati jedna iz druge jednom konstantom – koeficijentom sličnosti. Zato vrijedi pretpostaviti sljedeće aproksimacije perioda u realnom slučaju kad ima otpora gibanju kuglice:

$$T_{mj} \approx \overline{k_{S,1}} T \quad (41)$$

$$T_{mj} \approx \overline{k_{S,2}} T_A \quad (42)$$

⁵ Faktor statičkog trenja između dviju čeličnih tvari varira između 0.5 i 0.8 [5] pa je po uvjetu iz 2.6. minimalni q da kuglica čitavo vrijeme bude u režimu statičkog trenja približno jednak 0.36 što niti u jednom mjerenu nije zadovoljeno. jer bi se tada obruč počeo vrtjeti prebrzo i ne bi bilo moguće izvesti kontrolirani eksperiment.

gdje je T_{mj} eksperimentalno određeni period titranja kuglice, T teorijski period titranja kuglice određen izrazom (36), T_A period malih oscilacija kuglice, a $\bar{k}_{S,1}$ i $\bar{k}_{S,2}$ srednje vrijednosti koeficijenta sličnosti. Ideja je za svako mjerjenje izračunati koeficijente sličnosti i zatim uzeti srednju vrijednost svih koeficijenata po svim mjerjenjima iz tablice 2. Ovdje odmah treba napomenuti da aproksimacija (41) vrijedi samo za $q < \frac{2}{1+\cos\theta_0}$, a aproksimacija (42) za $q < 1$.

U tablici 3. prikazani su koeficijenti sličnosti $k_{S,1}$ za mjerena iz tablice 2.

Tablica 3. Aproksimiranje mjereneog perioda titranja kuglice teorijskim periodom

q	Teorijski period [s]	Mjereni period [s]	Koeficijent sličnosti	Aproksimacija perioda [s]	Apsolutno odstupanje [s]
0,023	0,779	1,247	1,600	1,322	0,075
0,032	0,779	1,320	1,694	1,322	0,002
0,052	0,807	1,332	1,650	1,369	0,037
0,077	0,775	1,332	1,719	1,314	0,018
0,078	0,796	1,368	1,718	1,351	0,017
0,081	0,799	1,362	1,705	1,355	0,007
0,086	0,777	1,368	1,761	1,318	0,050
0,086	0,786	1,332	1,696	1,332	0,000
0,087	0,781	1,297	1,660	1,325	0,028
0,089	0,782	1,332	1,704	1,326	0,006
0,093	0,782	1,357	1,735	1,327	0,030
0,100	0,794	1,332	1,678	1,346	0,014
0,105	0,781	1,332	1,706	1,324	0,008
0,111	0,784	1,368	1,745	1,330	0,038
0,111	0,796	1,351	1,697	1,350	0,001
0,113	0,806	1,332	1,652	1,367	0,035
0,113	0,791	1,400	1,770	1,341	0,059
0,119	0,785	1,348	1,718	1,331	0,017
0,120	0,786	1,408	1,791	1,333	0,075
0,122	0,813	1,320	1,623	1,379	0,059
0,122	0,806	1,419	1,762	1,366	0,053
0,129	0,802	1,332	1,660	1,361	0,029
0,140	0,795	1,332	1,675	1,349	0,017
0,181	0,822	1,368	1,665	1,394	0,026
0,183	0,836	1,370	1,640	1,417	0,047
0,208	0,847	1,423	1,680	1,437	0,014

Iz tablice 3. računa se srednja vrijednost koeficijenta sličnosti $\bar{k}_{S,1}$ i dobiva se $\bar{k}_{S,1} = 1.696$. Standardna devijacija za koeficijent sličnosti $k_{S,1}$ iznosi 0.046. Uvrštavanjem koeficijenta sličnosti u ranije postavljenu aproksimativnu formulu dobiva se:

$$T_{mj} \approx 1.696 \cdot T, \quad (41)$$

gdje je T teorijski period koji se računa po izrazu (36). U zadnjem stupcu tablice 3. prikazano je apsolutno odstupanje aproksimacije (41) od mjereneog perioda i vidi se da je maksimalno apsolutno odstupanje aproksimacije od izmjerene vrijednosti perioda 0.075 s, a maksimalno relativno odstupanje aproksimacije od izmjerene vrijednosti iznosi 6%. Mala standardna devijacija koeficijenta sličnosti te mala apsolutna i relativna pogreška aproksimacije upućuju na vrlo visoku točnost aproksimacije.

U tablici 4. prikazane su vrijednosti koeficijenta sličnosti $\bar{k}_{S,2}$ za dana mjerena iz tablice 2.

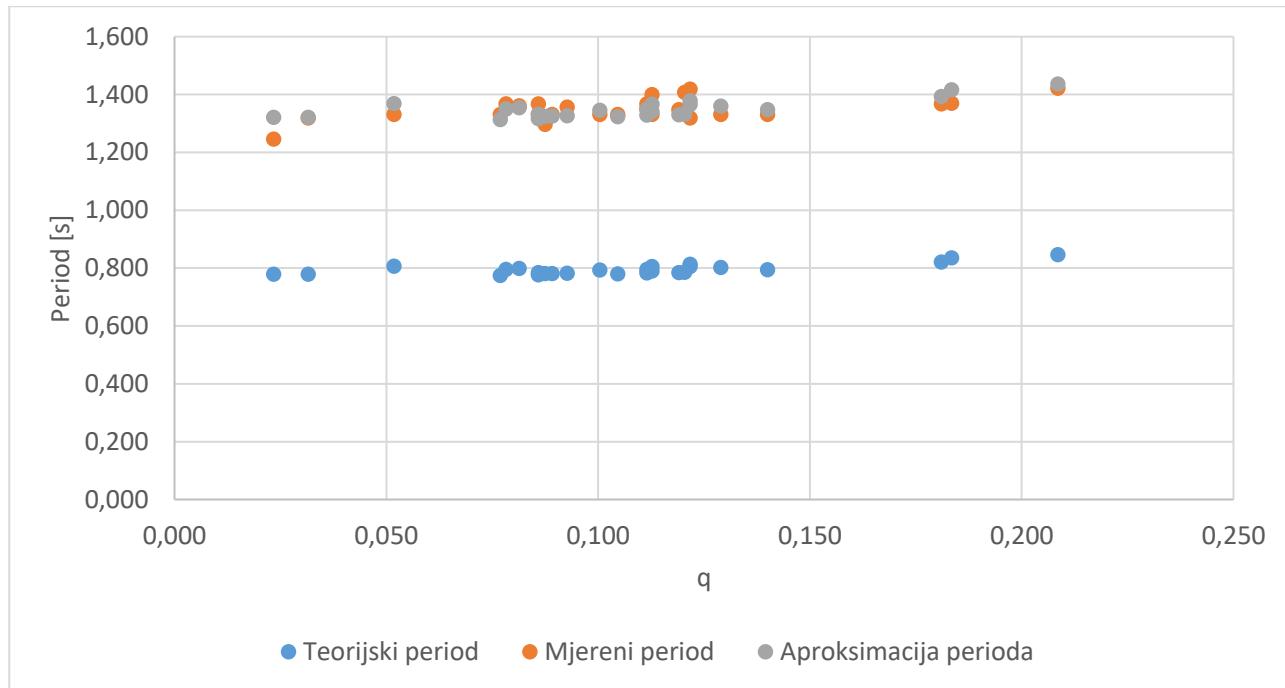
Tablica 4. Aproksimiranje mjerenog perioda kuglice periodom malih oscilacija

q	Mjereni period [s]	Period malih oscilacija [s]	Koeficijent sličnosti	Aproksimacija perioda [s]	Apsolutno odstupanje [s]
0,023	1,247	1,239	1,006	1,290	0,043
0,032	1,320	1,244	1,061	1,296	0,024
0,052	1,332	1,258	1,059	1,309	0,023
0,077	1,332	1,275	1,045	1,327	0,005
0,078	1,368	1,276	1,072	1,328	0,040
0,081	1,362	1,278	1,066	1,330	0,032
0,086	1,368	1,281	1,068	1,333	0,035
0,086	1,332	1,281	1,040	1,333	0,001
0,087	1,297	1,282	1,012	1,335	0,038
0,089	1,332	1,283	1,038	1,336	0,004
0,093	1,357	1,286	1,055	1,338	0,019
0,100	1,332	1,291	1,032	1,344	0,012
0,105	1,332	1,294	1,029	1,347	0,015
0,111	1,368	1,299	1,053	1,353	0,015
0,111	1,351	1,299	1,040	1,353	0,002
0,113	1,332	1,300	1,024	1,354	0,022
0,113	1,400	1,300	1,077	1,354	0,046
0,119	1,348	1,305	1,033	1,358	0,010
0,120	1,408	1,306	1,078	1,359	0,049
0,122	1,320	1,307	1,010	1,360	0,040
0,122	1,419	1,307	1,086	1,360	0,059
0,129	1,332	1,312	1,015	1,366	0,034
0,140	1,332	1,321	1,009	1,375	0,043
0,181	1,368	1,353	1,011	1,409	0,041
0,183	1,370	1,355	1,011	1,411	0,041
0,208	1,423	1,377	1,034	1,433	0,010

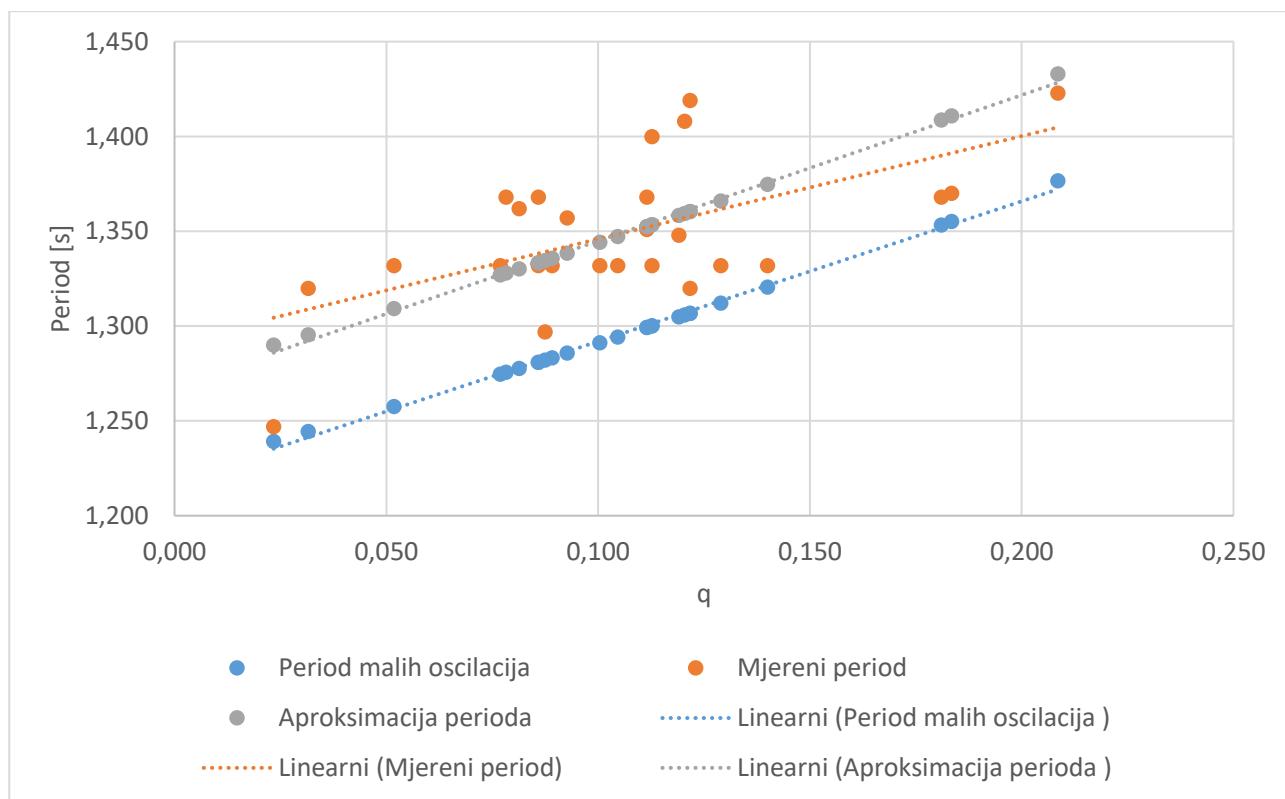
Računanjem srednjeg koeficijenta sličnosti prema podatcima iz tablice 4. dobiva se $\bar{k}_{S,2} = 1.041$. Standardna devijacija koeficijenta sličnosti $k_{S,2}$ iznosi 0.024. Uvrštanjem srednje vrijednosti koeficijenta sličnosti u predviđenu aproksimativnu formulu dobiva:

$$T_{mj} \approx 1.041 \cdot T_A = 1.041 \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{p(1-q)}}, \quad (42)$$

gdje je T_A period malih oscilacija. Prema tablici 4. vidi se da je aproksimacija (42) također izrazito točna jer je maksimalno apsolutno odstupanje aproksimacije jednako 0.059 s, a maksimalno relativno odstupanje iznosi 4%. Maksimalno apsolutno odstupanje, maksimalna relativna pogreška i standardna devijacija koeficijenta sličnosti manji su kod aproksimacije (42) nego kod aproksimacije (41) što upućuje na veću točnost aproksimacije (42). Time je potvrđena hipoteza iz poglavlja 2 da kutna brzina rotacije obruča ima veći utjecaj na period titranja kuglice nego početni kut otklona jer je aproksimacija (42) točnija iako se početni kut otklona ne uzima u obzir, a u aproksimaciji (41) se uzima u obzir. Podatci iz tablica 3. i 4. prikazani su grafički redom na slikama 9. i 10.



Slika 9. Grafički prikaz aproksimacije perioda titranja kuglice teorijskim periodom



Slika 10. Grafički prikaz aproksimacije perioda titranja kuglice periodom malih oscilacija

Iz grafa na slici 9. jasno se vidi vrlo visoka točnost aproksimacije (41) jer se sive točke koje predstavljaju aproksimirani period većim dijelom podudaraju s narančastima koje predstavljaju izmjereni period. Graf na slici 10. nešto je složeniji i potrebno ga je rastumačiti u kontekstu zaključka da je aproksimacija (41) manje točna od aproksimacije (42) što se ne nameće samo. Na slici 10. skala za period titranja na osi ordinata znatno je uvećana na intervalu [1.200,1.450]. Zato se na prvi pogled čini da su sive točke u prosjeku znatno udaljenije od narančastih nego na slici 9., ali tome je tako

samo zbog tog drastičnog povećanja skale na osi ordinata. Da bi se takva pogrešna percepcija izbjegla, radi zornijeg prikaza povučene su u programu *MS Excel* linearne crte trenda za aproksimaciju perioda i mjereni period. Te dvije crte trenda na tako širokoj skali vrlo su bliske jedna drugoj pa slika 10. ponovno upućuje na izrazito visoku točnost aproksimacije.

5 Zaključak

U radu je pronađeno analitičko rješenje gibanja kuglice (perle) u žlijebu obruča koji rotira stalnom kutnom brzinom. Proveden je eksperiment s čeličnom kuglicom i čeličnim obručem, no u nedostatku druge opreme i drugog potrebnog pribora u eksperimentu je otpor gibanju kuglice imao velik utjecaj kao što su pokazala mjerjenja. Unatoč postojanju otpora i nemogućnosti uzimanja otpora u obzir u teorijskom modelu, napravljene su dvije vrlo točne empirijske aproksimacije perioda titranja perle koji bi se trebao opaziti u stvarnosti uz prisutnost otpora gibanju kuglice.

U dalnjim istraživanjima problema trebalo bi provesti mjerena s različitim kuglicama i različitim obručima. Prvenstveno bi trebalo izmijeniti oblik žlijeba kako bi se otpor gibanju minimizirao i trebali bi se osigurati takvi uvjeti da pronađena nejednakost koja je dovoljan uvjet za to da se kuglica čitavo vrijeme giba u režimu statičkog trenja bude zadovoljena, a da istovremeno i kontrolirani eksperiment bude izvediv.

6 Matematički dodatci

U ovom dijelu riješeni su svi integrali i sve diferencijalne jednadžbe korištene u radu koje nisu bile rješavane u tekstu radi preglednosti.

6.1 Dodatak 1

Opće rješenje integrala $\int \sin(x)\cos(x)dx$.

Uvedimo supstituciju $t = \sin(x)$. Tada je $\frac{dt}{dx} = \cos(x)$ pa integral poprima oblik:

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \int t\cos(x)\frac{dt}{\cos(x)} = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin(x))^2}{2} + C.$$

6.2 Dodatak 2

Dana je diferencijalna jednadžba (12):

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{K+1} \left(\sin\theta \cos\theta \omega^2 - \frac{g}{\rho} \sin\theta \right),$$

i potrebno je egzaktno odrediti rješenje te jednadžbe ili aproksimativno odrediti rješenje te jednadžbe.

Za početak, supstitucija $u = \dot{\theta}$ snižava red jednadžbe jer vrijedi:

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \dot{\theta} = \frac{du}{dt} \frac{d\theta}{d\theta} = u \frac{du}{d\theta}.$$

Uvrštavanjem toga u početnu jednadžbu dobiva se:

$$\begin{aligned} u \frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{K+1} \left(\sin\theta \cos\theta \omega^2 - \frac{g}{\rho} \sin\theta \right) \\ \Leftrightarrow u du &= \frac{1}{K+1} \left(\sin\theta \cos\theta \omega^2 - \frac{g}{\rho} \sin\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int u du = \frac{1}{K+1} \int \left(\sin\theta \cos\theta \omega^2 - \frac{g}{\rho} \sin\theta \right) d\theta.$$

Lijeva strana prethodne jednadžbe tabično je integrabilna, a na desnoj je strani jedan član tabično integrabilan, a u drugom članu se prepoznaže integral iz dodatka 1 pa vrijedi:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{K+1} \left(\omega^2 \frac{(\sin\theta)^2}{2} + \frac{g}{\rho} \cos\theta \right) + C \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{1}{K+1} \left(\omega^2 (\sin\theta)^2 + \frac{2g}{\rho} \cos\theta \right) + C_1}.$$

Napomenimo samo da se konstanta C_1 određuje se iz uvjeta da kuglica u početnom trenutku miruje, tj. kad je kut otklona jednak θ_0 vrijedi $u = 0$ pa to slijedi:

$$C_1 = -\frac{1}{K+1} \left(\omega^2 (\sin\theta_0)^2 + \frac{2g}{\rho} \cos\theta_0 \right).$$

6.3 Dodatak 3

Ovdje će biti pokazan razvoj eliptičkog integrala u beskonačnu sumu Legendreovih polinoma kojom je moguće dobro aproksimirati vrijednost eliptičkog integrala. U [3] se može naći:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2(\sin\varphi)^2}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} P_n(l) \left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]^{2n+1},$$

pri čemu je P_n Legendreov polinom n -tog stupnja, a $l = 1 - 2k^2$. Za Legendreov polinom n -tog stupnja vrijedi [4]:

$$P_n(x) = 2^n \sum_{i=0}^n x^i \binom{n}{i} \left(\frac{n+i-1}{n} \right).$$

Uvrštavanjem toga dobiva se:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2(\sin\varphi)^2}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2n+1} \left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]^{2n+1} \sum_{i=0}^n (1-2k^2)^i \binom{n}{i} \left(\frac{n+i-1}{n} \right).$$

6.4 Dodatak 4

Kod za računanje perioda titranja perle prema izrazu (36) u programskom jeziku *Python* naveden je u nastavku.

```
from mpmath import*
mp.dps = 15
mp.pretty = True

teta0 = float(input("teta0(u radijanima): "))
q = float(input("q : "))
p = float(input("p: "))

a=-2p
t1 = q - (q**2 + 1/2*(2-(q*sin(teta0))**2 - 2*(cos(teta0))))** (1/2)
t2 = q + (q**2 + 1/2*(2-(q*sin(teta0))**2 - 2*(cos(teta0))))** (1/2)

konRez = 16/((a*t1)** (1/2))

def fakt(x):
    y = 1
    while x > 0:
        y*=x
        x-=1
    return y

def binomKoef(n, k):
```

```

        return(fakt(n) / (fakt(n)*fakt(n-k) ))

def dsuma(n,t1,t2):
    n = int(n)
    suma = 0
    for k in range(n+1):
        dio1 = ( 1-2*(t1/t2) )**k
        dio2 = ( binomKoef(n,k) ) * ( binomKoef((n+k-1)/2,n) )
        suma += dio1 * dio2
    return suma

def bsuma(t1,t2,teta0):
    z = tan((asin(tan(teta0/2)/(t2** (1/2))))/2)
    return nsum(lambda n: (-
2)**n/(2*n+1)*(z**(2*n+1))* (dsuma(n,t1,t2)),[0,inf])

#Množenje prvog dijela konačnog rezultata sa sumom
konRez=bsuma(t1,t2,teta0)

print(konRez)
***
```

7 Zahvale

Zahvaljujem se gospodinu Bertiju Erjavcu i gospodinu Željku Marohniću s Instituta za fiziku na korisnim savjetima pri pisanju rada i pomoći u nabavi opreme za eksperiment. Zahvaljujem se i učeniku drugog razreda XV. gimnazije u Zagrebu Marku Ercegoviću koji je napisao kod iz dodatka 4. i mentorici Suzani Šijan za vođenje tijekom istraživanja.

8 Popis literature

- [1] <http://iypt.icm.hr/problemi/>, pristupano 29.11.2020.
- [2] Baker, T. E., & Bill, A. (2012). Jacobi elliptic functions and the complete solution to the bead on the hoop problem. American Journal of Physics, 80(6), 506–514. doi:10.1119/1.3682321
- [3] M. O. Gonzalez: Elliptic integrals in terms of Legendre polynomials (poveznica: <https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/S2040618500033104>, pristupano 29.11.2020.)
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials, pristupano 29.11.2020.
- [5] https://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html, pristupano 29.11.2020.
- [6] Mladen Pačar, Maja Katalinić: Integrali s primjenom, Tao matematike – Osijek 2012.
- [7] Petar Javor: Matematička analiza 2, Element – Zagreb, 2002.
- [8] Dubravko Horvat: Fizika II. Titranje, valovi, elektromagnetizam, optika i uvod u modernu fiziku, Element – Zagreb, 2018.
- [9] Višnja Henč-Bartolić, Petar Kulišić: Valovi i optika, Školska knjiga – Zagreb, 2004.